Razonamiento Matemático

Segundo grado de Secundaria

Editorial San Marcos

Lexicom

Intelectum EVOLUCIÓN

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Razonamiento matemático
Segundo grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Eder Gamarra Tiburcio / Jhonatan Peceros Tinco
Josué Dueñas Leyva / Saby Camacho Martinez
Óscar Díaz Huamán

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Miguel Lancho / Carol Clapés Hurtado / Melissa Chau /
Cristian Cabezudo / Vilma Jacquelín Añazco /
Lourdes Zambrano Ibarra

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición: 2013
Tiraje: 9000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2013-18810
ISBN: 978-612-313-115-9
Registro de Proyecto Editorial N.° 31501001300694

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.º 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

Este libro se terminó de imprimir
en la Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.º 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.

La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.

El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.

INTELECTUM

Razonamiento matemático

Presentación

El vocablo *razonamiento* proviene del verbo *razonar* que significa 'inferir, conjeturar ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión'.

De esta manera podemos afirmar que el razonamiento matemático es aquella disciplina académica que basada en los conocimientos de la matemática busca desarrollar las aptitudes y las habilidades lógicas de los estudiantes para deducir una solución a un problema, para sacar una consecuencia de algo por indicios y conducir a un resultado.

Teniendo en consideración cuán importante es potenciar las habilidades, hemos elaborado el libro de Razonamiento matemático como un instrumento pedagógico que conllevará a esta meta. La estructura de cada libro está diseñada de acuerdo a los nuevos lineamientos de la educación cuyo objetivo es que todos desarrollen la capacidad de pensar, creativa y críticamente y procesen de manera exitosa los conocimientos.

Nuestra propuesta pedagógica se inicia con páginas binarias conformadas por una lectura de contexto matemático que motivará al estudiante a conectarse con este conocimiento al corroborar que le servirá y le será imprescindible en su vida actual y futura. Complementan las binarias la sección *Matemática recreativa*, que propone un problema cuyas pautas para solucionarlo se darán a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos).

Continúa el *Marco teórico* desarrollado de manera clara y precisa en cuatro unidades, que tienen como soporte los problemas resueltos, donde desarrollamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades específicas del estudiante.

Todo este marco teórico es aplicado a la práctica a través de dos secciones:

Actividades de razonamiento, para que el estudiante inicie la aplicación del conocimiento procesado. Al final de cada actividad hay un reto. Y la sección *Refuerza practicando*, que afianzará aún más la práctica con problemas propuestos por niveles, para que el avance sea de modo progresivo y se pueda ser capaz de afrontar nuevos y grandes retos.

Todo lo propuesto en la colección contiene situaciones de aprendizaje variadas que permitirán obtener resultados cualitativos y cuantitativos en el proceso cognoscitivo de los estudiantes.

Nuestro firme propósito es formar jóvenes capacitados, preparados, competitivos, eficientes y eficaces.

¡A esforzarse y a triunfar!

Estructura del libro



Página que inicia la unidad

Conformada por una lectura matemática de contexto cotidiano que conducirá al estudiante a una motivación concreta al comprobar que la matemática está asociada a su entorno real.

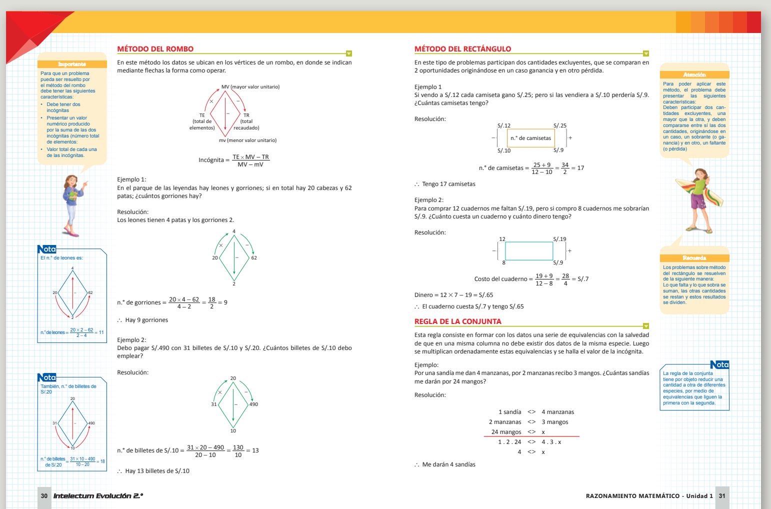


Matemática recreativa

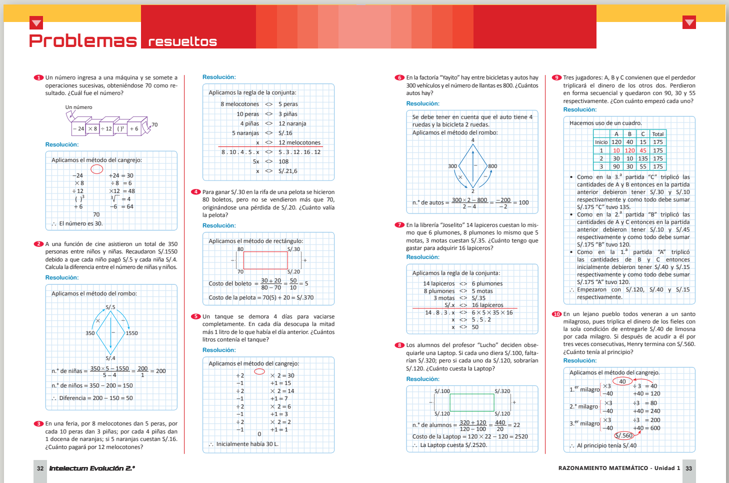
Sección que inicia de manera entretenida y divertida los conocimientos con un problema matemático que a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos) se proporcionarán las pautas para solucionarlo.

Contenido teórico

Compuesto por una variedad de conocimientos enfocados en el razonamiento aritmético, razonamiento algebraico y razonamiento geométrico los que a su vez ponen en práctica el razonamiento lógico abstracto, el razonamiento operativo y el razonamiento organizativo. El desarrollo de cada tema se ha hecho con criterio pedagógico teniendo en cuenta el grado académico.

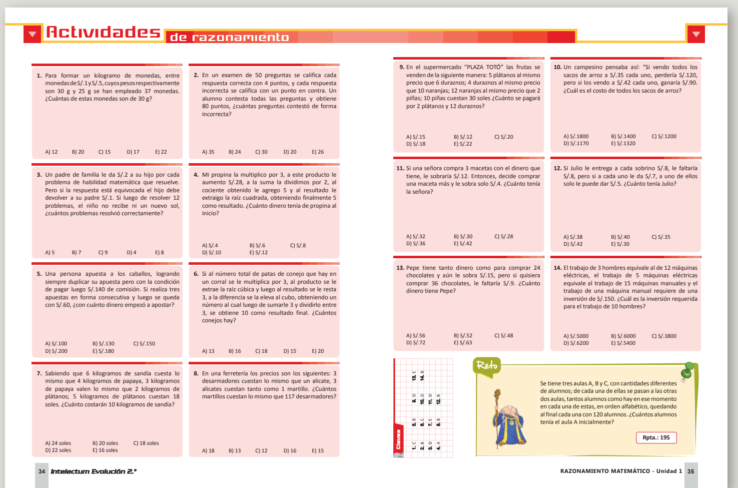






Problemas resueltos

Gran cantidad de problemas desarrollados por tema donde aplicamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades del estudiante.



Actividades de razonamiento

Actividades propuestas para que el estudiante empiece su entrenamieto del conocimiento procesado; son actividades elaboradas también por tema. Al final de cada actividad hay un reto que el alumno debe intentar resolver.



Refuerza practicando

Problemas clasificados en niveles con la finalidad de que el alumno refuerce en forma progresiva y llegue preparado para enfrentarse a grandes y nuevos retos.

Contenido

UNIDAD 1



Ardillas voladoras

La ardilla voladora es uno de los animales más misteriosos que existen. A pesar de lo que su nombre sugiere, las ardillas voladoras no tienen alas y en realidad no vuelan sino planean. La ardilla voladora tiene una amplia membrana de piel que se extiende desde los tobillos hasta las muñecas y forma una superficie similar a la de un paracaídas. Cuando se desplaza de un árbol a otro, la ardilla se tira y alcanza una gran velocidad mientras cae en picada al suelo. Luego, abre completamente sus cuatro patas para formar una superficie voladora cuadrada que le permite planear hasta su destino. La ardilla puede cambiar de dirección inclinándose hacia uno u otro costado, y levantando o bajando el hueso de su muñeca para regular la tensión del patagio.

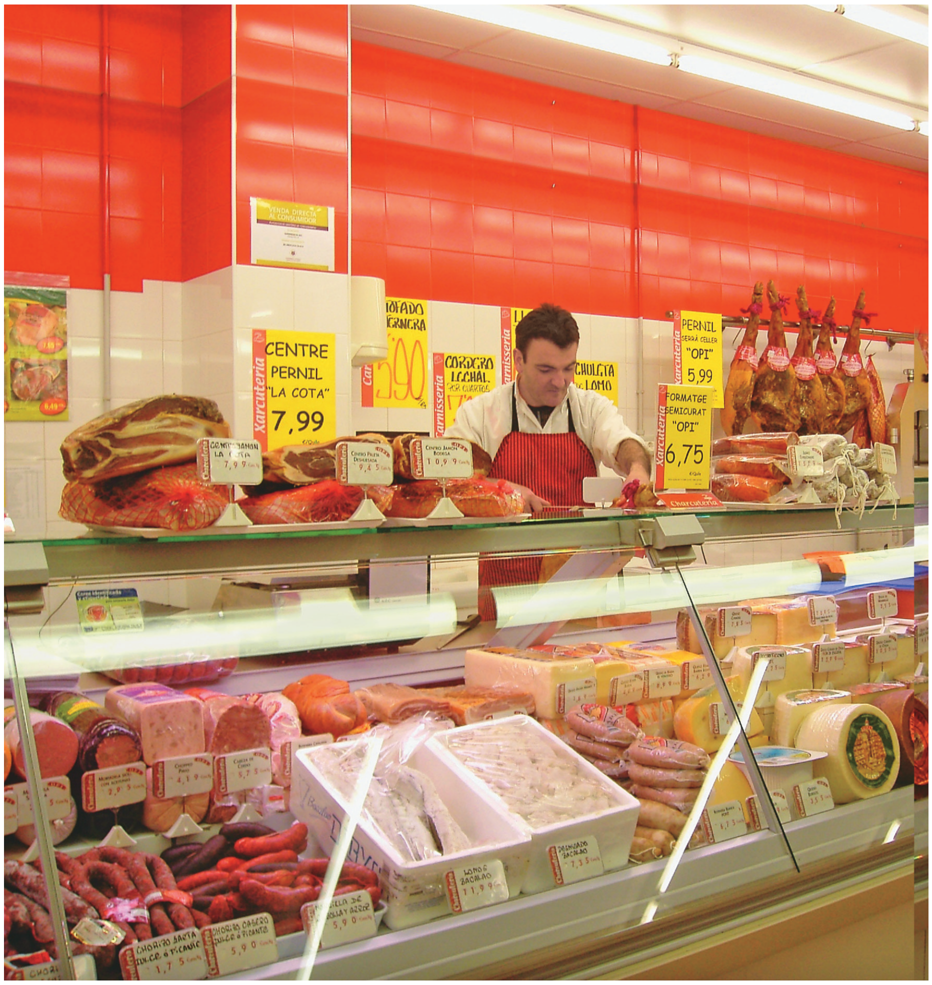
La cola aplanada estabiliza a la ardilla durante el vuelo, casi del mismo modo en que la cola del cometa ayuda a que se mantenga derecho. Inmediatamente antes del aterrizaje, la ardilla levanta la cola y echa su cuerpo hacia atrás, esta acción disminuye la velocidad del vuelo de la ardilla, dándole suficiente tiempo para maniobrar con sus pies y aferrarse al tronco del árbol hacia donde se dirige. El movimiento de la cola es parecido al del elevador de un avión, hace que el cuerpo de la ardilla se incline hacia arriba y se produzca mayor elevación y resistencia al aire, disminuyendo así la velocidad de aterrizaje de la ardilla.

Los factores principales de la distancia de planeo son la altura del despegue y el ángulo de planeo, ambos determinados por la ardilla. La mayoría de las ardillas voladoras pueden planear 50 metros (165 pies) o más si despegan desde una altura suficientemente elevada. La ardilla voladora gigante de los bosques asiáticos puede planear hasta 457 metros (1500 pies).

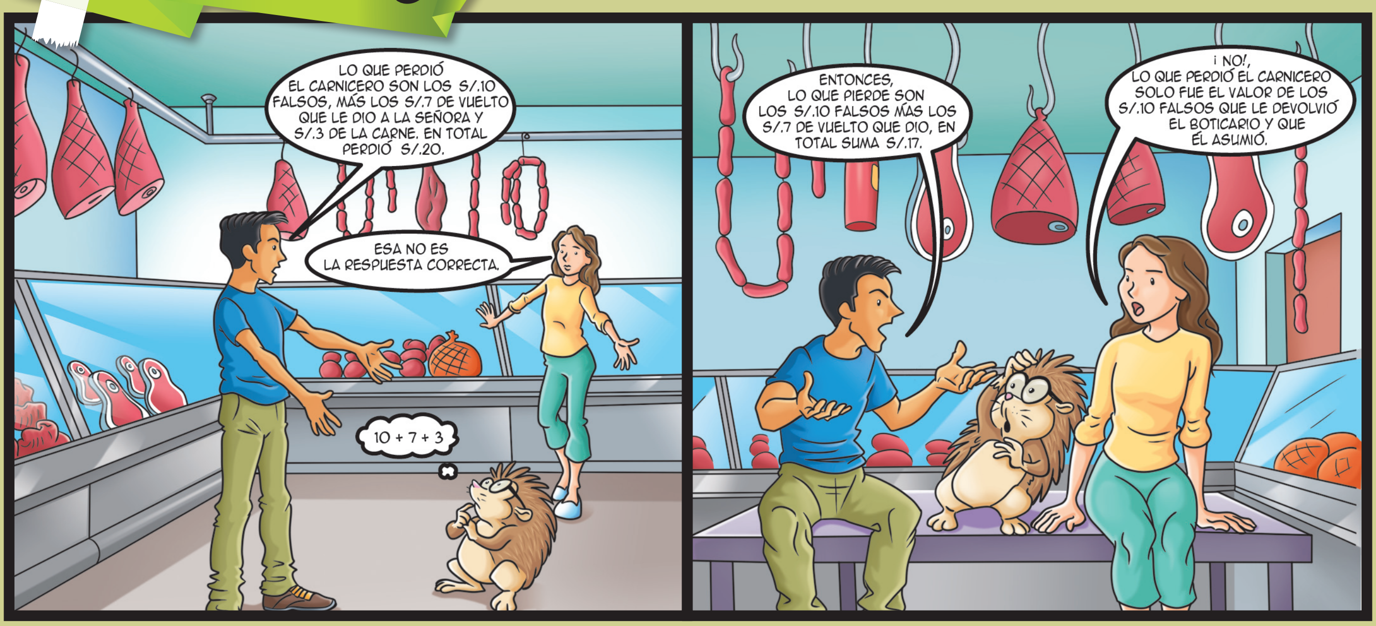
Matemática recreativa

¿Cuánto perdió el carnicero?

Una señora compra carne por un valor de S/.3 y paga con un billete de S/.10. El carnicero, que no tenía cambio, cruza la calzada y se dirige hacia la botica para cambiar el billete en dos monedas de S/.5. Cruza nuevamente la calzada y cambia en la panadería una de las monedas de S/.5 en cinco monedas de S/.1, con lo cual consigue dar vuelto. Luego de algunos minutos el boticario le devuelve el billete de S/.10, pues era ¡falso! y el carnicero compungido le entrega un billete de S/.10 verdadero. ¿Cuánto perdió el carnicero?



DIÁLOGO



Planteo de ecuaciones

Plantear una ecuación es un procedimiento que consiste en traducir un enunciado expresado en lenguaje común al lenguaje matemático (ecuación).

ENUNCIADO: LENGUAJE COMÚN → TRADUCIR → ECUACIÓN: LENGUAJE MATEMÁTICO

Veamos algunos ejemplos:

	Lenguaje común	Lenguaje matemático
1	El doble de un número.	$2x$
2	La tercera parte de mi dinero.	$x/3$
3	El triple de un número, aumentado en 5.	$3x + 5$
4	El triple de un número aumentado en 5.	$3(x + 5)$
5	La suma de dos números consecutivos es 99.	$x + x + 1 = 99$
6	La suma de tres números pares consecutivos es 36.	$x + x + 2 + x + 4 = 36$
7	El triple de un número, aumentado en su mitad.	$3x + x/2$
8	El cuadrado de un número aumentado en 5.	$(x + 5)^2$
9	El cuadrado de un número, aumentado en 5.	$x^2 + 5$
10	La diferencia de dos números es 20.	$a - b = 20$
11	"a" excede a "b" en x.	$a - b = x$
12	El exceso de "a" sobre "b" es y.	$a - b = y$
13	"a" es excedido por "b" en 20.	$b - a = 20$
14	Dos números están en la relación de 3 a 5.	$\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$
15	Un número excede a 20 tanto como 100 excede a dicho número.	$x - 20 = 100 - x$

Observación:

Luego de plantear y resolver la ecuación se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Si el valor obtenido verifica la ecuación.
- Si el valor de la incógnita corresponde a la pregunta hecha en el enunciado del problema.



Importante

Generalmente las cantidades desconocidas están expresadas por las últimas letras del alfabeto como son x, y, z, etc.
Ejemplo:
Mi estatura: "x"

Nota

Al relacionar una incógnita a dos o más cantidades, se puede traducir de dos maneras:

Ejemplo:
Tres números enteros consecutivos:
n.° menor = x
n.° intermedio = x + 1
n.° mayor = x + 2
ó
n.° menor = x – 1
n.° intermedio = x
n.° mayor = x + 1



Recuerda

Para el planteo de una ecuación es importante tener en cuenta la coma (,).
Ejemplo:

- El triple de un número, disminuido en 8.
  $3x - 8$
- El triple de un número disminuido en 8.
  $3(x - 8)$

Problemas resueltos

1 La diferencia de 2 números es 36. Si al mayor se disminuye 12 se obtiene el cuádruple del menor. Halla el producto de los números.

Resolución:

La diferencia de los números es 36.
n.° mayor: $x + 36$
n.° menor: x
Si al mayor se disminuye 12 se obtiene el cuádruple del menor:

$$x + 36 - 12 = 4x$$
$$x + 24 = 4x$$
$$3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

Luego: n.° menor $= 8$
n.° mayor $= 8 + 36 = 44$

$\therefore\ 44 \times 8 = 352$

2 Halla el mayor de 3 números consecutivos, de tal manera que al multiplicarlos entre sí se obtiene 63 veces el valor del número intermedio.

Resolución:

Sean los números consecutivos: $x - 1$; x; $x + 1$
Por dato: $(x - 1)x(x + 1) = 63x$
$$x^2 - 1 = 63$$
$$x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$\therefore$ n.° mayor: $x + 1$
$8 + 1 = 9$

3 Si Juan ganara S/.880, tendría 9 veces lo que le quedaría si perdiera S/.40. ¿Cuánto tenía inicialmente?

Resolución:

Sea la cantidad inicial: S/.x
Si gana S/.880 tendrá: S/.(x + 880)
Si pierde S/.40 tendrá: S/.(x – 40)
Por dato: $x + 880 = 9(x - 40)$
$$x + 880 = 9x - 360$$
$$8x = 1240 \Rightarrow x = \text{S/.}155$$
$\therefore$ Juan tenía inicialmente S/.155.

4 El cuadrado de la suma de 2 números positivos consecutivos es 81. Halla la diferencia del triple del mayor y el doble del menor.

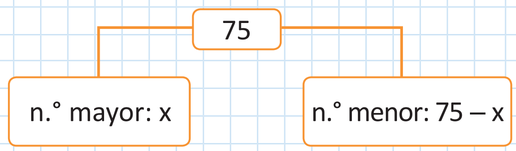
Resolución:

Sean los números consecutivos: x; $x + 1$
Por dato: $(x + x + 1)^2 = 81$
$$(2x + 1)^2 = 81$$
$$2x + 1 = 9$$
$$2x = 8 \Rightarrow x = 4$$
Piden: $3(x + 1) - 2x = x + 3$
$= 4 + 3 = 7$

5 Dos números suman 75 y al dividir el número mayor entre el menor, resulta 3 de cociente y 7 de residuo. Determina el número menor.

Resolución:

Hacemos un esquema:



Por dato:
x | 75 – x
7 | 3

$$x = 3(75 - x) + 7$$
$$x = 225 - 3x + 7$$
$$4x = 232 \Rightarrow x = 58$$
$75 - x = 75 - 58 = 17$

$\therefore$ n.° menor es 17.

6 Una persona tiene S/.120 y otra S/.50, después que cada una de ellas gasta la misma cantidad de dinero, a la primera le queda el triple de lo que le queda a la segunda. ¿Cuánto gasta cada persona?

Resolución:

Sea "x" lo que gasta cada una.
Lo que le queda a la primera: $120 - x$
Lo que le queda a la segunda: $50 - x$
Por dato: $120 - x = 3(50 - x)$
$$120 - x = 150 - 3x$$
$$2x = 30 \Rightarrow x = 15$$
$\therefore$ Cada persona gasta S/.15.

7 El exceso del triple de un número sobre 42 equivale al exceso de 286 sobre el número. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Sea el número: x

Por dato: $3x - 42 = 286 - x$

$4x = 328 \Rightarrow x = 82$

$\therefore$ El número es 82.

8 En un corral hay aves y conejos. Contando las patas son 80 en total y contando las cabezas son 35. ¿Cuántos conejos hay en el corral?

Resolución:

Sean: n.° de aves: x

n.° de conejos: $35 - x$

Por dato: $2x + 4(35 - x) = 80$

$2x + 140 - 4x = 80$

$60 = 2x \Rightarrow x = 30$

$35 - x = 35 - 30$

$= 5$

$\therefore$ n.° de conejos es 5.

9 Se tienen 2 números tales que si al primero se le sumase 1/5 del segundo daría lo mismo que si al segundo se le sumase 1/9 del primero. Halla la relación del primero al segundo.

Resolución:

Sean los números: a y b

Por condición del problema:

$$a + \frac{b}{5} = b + \frac{a}{9}$$

$$\frac{8}{9}a = \frac{4}{5}b$$

$$\frac{2}{9}a = \frac{b}{5}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{9}{10}$$

$\therefore$ La relación es de 9 a 10.

10 Reparte S/.190 entre 4 personas de modo que la segunda reciba S/.15 más que la primera, la tercera el quíntuple de la primera y la cuarta S/.5 menos que la tercera. ¿Cuánto dinero recibe la segunda?

Resolución:

Sean:

Lo que recibe la 1.ª : x

Lo que recibe la 2.ª : $x + 15$

Lo que recibe la 3.ª : $5x$

Lo que recibe la 4.ª : $5x - 5$

Por condición del problema:

$x + x + 15 + 5x + 5x - 5 = 190$

$12x + 10 = 190$

$12x = 180 \Rightarrow x = 15$

Piden: $x + 15$

$\therefore 15 + 15 =$ S/.30

12 Divide 70 en tres partes tal que la menor de ellas sea igual a 1/3 de la parte intermedia y esta sea igual a 3/10 de la parte mayor. ¿Cuáles son dichas partes?

Resolución:

Sean:

Parte mayor: x

Parte intermedia: $\frac{3}{10}x$

Parte menor: $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}x\right) = \frac{1}{10}x$

Por condición del problema:

$$x + \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}x = 70$$

$$\frac{14x}{10} = 70 \Rightarrow x = 50$$

$\therefore$ Las partes son: 5; 15 y 50.

Actividades de razonamiento

1. Halla el mayor de tres números consecutivos enteros y positivos cuyo producto es igual a 15 veces el segundo.

A) 8 B) 6 C) 12 D) 10 E) 5

2. Halla la suma de tres números consecutivos, tales que la suma del menor con el intermedio excede en 12 unidades al mayor.

A) 36 B) 28 C) 42 D) 48 E) 40

3. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Halla su producto.

A) 2793 B) 2790 C) 1780
D) 2580 E) 2785

4. El exceso de un número sobre 20 es igual al doble del exceso del mismo número sobre 70. Halla el número disminuido en su cuarta parte.

A) 120 B) 80 C) 90 D) 110 E) 98

5. El doble de mi edad, aumentado en su mitad, en sus 2/5, en sus 3/10 y en 40; suman 200 años. ¿Cuántos años tengo?

A) 40 B) 30 C) 50 D) 20 E) 10

6. Compré cierto número de relojes por S/.192. Si el precio de cada reloj es los 3/4 del número de relojes. ¿Cuántos relojes compré?

A) 16 B) 12 C) 25 D) 32 E) 20

7. Kelly tiene dos veces más de lo que tiene Elvis. Si Kelly le da 15 nuevos soles a Elvis, entonces tendrían la misma cantidad. ¿Cuánto tienen entre los dos?

A) 30 B) 90 C) 45 D) 60 E) 15

8. Halla dos números consecutivos, cuya suma es igual a la cuarta parte del primero, más los cinco tercios del segundo. Da como respuesta el mayor de ellos.

A) 9 B) 7 C) 8 D) 5 E) 4

9. La edad de Ever aumentada en 10 equivale a la edad de Luis disminuida en 10; además, el doble de la edad de Luis equivale al triple de la edad de Ever aumentada en 10 años. Calcula la edad de Luis.

A) 30 años B) 32 años C) 36 años
D) 40 años E) 42 años

10. Se reparte S/.1080 entre 3 personas. A la primera se le entrega 1/5 del total, a la segunda 2/3 de lo que queda, y a la tercera el resto. ¿Cuánto recibió la tercera persona?

A) S/.576 B) S/.864 C) S/.540
D) S/.216 E) S/.288

11. La suma de tres números es 72. El segundo es 1/5 del primero y el tercero excede al primero en 6. Halla el menor número.

A) 6 B) 10 C) 20 D) 30 E) 36

12. En una granja hay 92 patas y 31 cabezas. Si solo hay patos y conejos, ¿cuál es la diferencia entre el número de estos animales?

A) 31 B) 16 C) 1 D) 2 E) 15

13. Una persona tiene S/.100 y otra S/.40; después que cada una de ellas gastó la misma cantidad de dinero, a la primera le queda el cuádruple de lo que a la segunda. ¿Cuánto les queda en conjunto a ambas personas?

A) S/.15 B) S/.105 C) S/.100
D) S/.140 E) S/.35

14. La cabeza de un pescado mide 9 cm; la cola mide tanto como la mitad del cuerpo menos la cabeza, si el pescado entero mide 60 cm. ¿Cuánto mide la cola?

A) 8 cm B) 14 cm C) 7 cm
D) 37 cm E) 28 cm

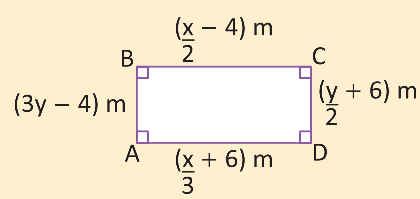
Claves

1. E
2. C
3. A
4. C
5. C
6. A
7. D
8. A
9. A
10. E
11. A
12. C
13. C
14. B

Reto

ABCD es un rectángulo. Calcula su área.





Rpta.: 208 m^2

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Las dos terceras partes de un número es 60, ¿cuál es el número?

A) 90 B) 180 C) 72 D) 60 E) 120

2. El perímetro de un rectángulo es 64 cm. Su largo es 4 cm menos que tres veces su ancho. Halla la dimensión del lado mayor del rectángulo.

A) 9 cm B) 18 cm C) 26 cm
D) 23 cm E) 32 cm

3. El perímetro de un solar en forma triangular es de 162 metros. Un lado mide el doble del segundo lado. La longitud del tercer lado es seis menos que el triple del segundo. Halla la medida del tercer lado.

A) 78 m B) 56 m C) 28 m
D) 72 m E) 46 m

4. La compañía de computadoras Computer Services utilizó los servicios de un *courier* para enviar un paquete. El correo le cobró S/.3, más S/.0,80 por kilo. ¿Cuánto pesó el paquete, si la compañía pagó por enviar el paquete S/.17,40?

A) 21 kg B) 18 kg C) 24 kg
D) 15 kg E) 26 kg

5. Un laboratorio alquiló una computadora pagando S/.400 por mes más S/.8 por hora por el uso de la computadora. La factura por el uso de la computadora fue de S/.7680 por un año. ¿Cuántas horas usó el laboratorio la computadora durante ese año?



A) 385 B) 415 C) 276
D) 324 E) 360

6. Javier, Omar y Andrés trabajaron un total de 17 horas para una organización que se dedica a ayudar a niños huérfanos. La semana pasada Omar trabajó "x" horas, Javier trabajó 1/3 de lo que trabajó Omar y Andrés trabajó 1 1/2 parte de lo que trabajó Omar. ¿Cuántas horas trabajó Javier?

A) 9 B) 6 C) 2 D) 4 E) 5

7. De un grupo de 32 cartas, se sacan "y" cartas y 3 más, luego se saca la mitad de lo que resta. Si todavía quedan 10 cartas, ¿cuántas cartas se sacaron la primera vez?

A) 9 B) 14 C) 12 D) 8 E) 10

8. Halla x: $5 + [3 - (x - 2)] = 2 - (x + 3) + 2x$

A) 0 B) 3 C) 5,5 D) –4 E) 6

9. Calcula la suma de cuatro números consecutivos, tales que la tercera parte de la suma de los dos mayores sea 10 unidades menos que la suma de los dos primeros.

A) 9 B) 21 C) 42 D) 38 E) 19

NIVEL 2

10. Tengo 30 monedas. Unas son de cinco soles y otras de un sol. Tengo en total 78 soles, ¿cuántas monedas son de 5 soles?

A) 18 B) 12 C) 15 D) 9 E) 6

11. Se tiene que el número de ovejas más bueyes es 30, el de bueyes más vacas es 50; el de vacas más cabras es 70 y el de vacas más ovejas es 40. ¿Cuántas vacas menos que cabras hay?

A) 40 B) 30 C) 20 D) 15 E) 10

12. Un depósito lleno de gasolina cuesta S/.275. Si se saca de él 85 litros cuesta S/.150. ¿Cuántos litros contenía el depósito?

A) 85 B) 125 C) 187 D) 289 E) 180

13. El costo de cada pasaje en un ómnibus es de S/.5, y por cada pasajero que baja suben dos. Si al final se ha recaudado S/.300, ¿con cuántos pasajeros partió al inicio, si al final llegó con 50 pasajeros?

A) 20 B) 40 C) 30 D) 15 E) 25

14. Dos obreros trabajan juntos diariamente, ganando uno de ellos dos soles más que el otro. Después de cierto tiempo reciben S/.240 y S/.210 respectivamente. ¿Cuánto ganó diariamente el primer y segundo obrero, respectivamente? (En soles).

A) 13 y 11 B) 24 y 22 C) 12 y 10
D) 18 y 16 E) 16 y 14

15. Debo pagar S/.205 con un total de 28 monedas billetes de cinco y diez soles. ¿Cuántos billetes de diez soles debo emplear y cuántas monedas de cinco, respectivamente?

A) 13 y 15 B) 14 y 14 C) 15 y 13
D) 17 y 11 E) 11 y 17

16. Un individuo tiene 250 000 soles de capital, y otro 100 000. El primero ahorra diariamente 30 soles, y el segundo 25 soles. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el capital del primero sea el doble del segundo?

A) 2500 días B) 2600 días C) 2700 días
D) 2800 días E) 2000 días

17. Reparte S/.2800 entre cuatro individuos, de manera que al primero le corresponda S/.400 más que al segundo, a este 2/3 de lo que le corresponde al tercero, y a este, S/.500 menos que al cuarto. Da la menor cantidad repartida.

A) S/.1070 B) S/.570 C) S/.380
D) S/.780 E) S/.250

18. Una vendedora lleva al mercado una cesta de huevos. Si cuando vende los 2/9 menos 5 huevos y añade 37 huevos a los que le quedan, entonces el número de huevos que llevó al mercado quedaría aumentado en 1/6. ¿Cuántos huevos llevaba en la cesta?



A) 66 B) 136 C) 96
D) 64 E) 108

19. La fabricación de un cierto número de ladrillos ha costado 360 000 soles; se inutilizaron 15 000 de ellos, y tuvieron que venderse los restantes a 120 soles el ciento, para obtener una ganancia del 12 por ciento. ¿Cuántos ladrillos se fabricaron?



A) 351 000 B) 45 300 C) 32 500
D) 753 000 E) 125 000

20. Tengo S/.120 y gasto los 2/3 de lo que no gasto. Si hubiese gastado 5/7 de lo que no gastaría, ¿cuánto más hubiese gastado?

A) S/.6 B) S/.3 C) S/.2
D) S/.9 E) S/.7

21. El perímetro de una sala rectangular es 56 m. Si el largo disminuye en 2 m y el ancho aumenta en 2 m, la sala se hace cuadrada. Halla las dimensiones de la sala.

A) 16 m × 15 m B) 16 m × 12 m
C) 18 m × 10 m D) 15 m × 15 m
E) 18 m × 16 m

22. Un cuadro con su marco cuesta S/.240. El mismo cuadro con un marco que cuesta la mitad del anterior, tiene un costo de S/.180. ¿Cuál es el costo del cuadro sin marco?

UNI 2005-I

A) S/.80 B) S/.100 C) S/.130
D) S/.120 E) S/.160

NIVEL 3

23. ¿Qué hora es, si la mitad del tiempo transcurrido desde las 09:00 h es igual a la tercera parte del tiempo que falta transcurrir para que sean las 19:00 h?

A) 12:00 B) 13:00 C) 14:00
D) 15:00 E) 13:30

24. Se tienen tres números enteros consecutivos, tales que la suma de los tres quintos del menor y un tercio del mayor excede en 11 a la mitad del número intermedio. Indica el valor de la suma de los números.

A) 78 B) 80 C) 79
D) 75 E) 69

25. Tú tienes dos veces lo que yo tengo, y él tiene dos veces más de lo que tú tienes. Si tuviera lo que tú, él y yo tenemos, tendría el doble de lo que tú tienes, más S/.35. ¿Cuánto tienes?

A) S/.7 B) S/.14 C) S/.21
D) S/.20 E) S/.42

26. Entre ocho personas tienen que pagar en partes iguales S/.200, como algunas de ellas no pueden hacerlo, cada una de las restantes tiene que pagar S/.15 más. ¿Cuántas personas no pagaron?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

27. Evelyn y Sonia van a usar sus ahorros para alquilar un departamento por una semana el próximo verano para llevar a sus hijos. El alquiler tiene un costo de S/.950. La aportación de Evelyn para el alquiler del departamento es S/.250 menos que el doble de lo que aportaría Sonia. ¿Cuánto va aportar Sonia?

A) S/.400 B) S/.550 C) S/.480
D) S/.610 E) S/.570

28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 290. ¿Cuál es la suma de estos números?

A) 20 B) 16 C) 24 D) 28 E) 30

29. Un hacendado compra 5 vacas, 7 caballos y 8 cerdos. Una vaca cuesta S/.120 más que un caballo, y 10 cerdos cuestan tanto como 8 caballos. Si por todo pagó S/.1520, calcula el precio de una vaca más un caballo y un cerdo.



A) S/.170 B) S/.90 C) S/.250
D) S/.260 E) S/.280

30. Varios amigos desean hacer una excursión y no pueden ir 10 de ellos por no disponer mas que de un cierto número de autos: 5 de 6 asientos y el resto de 4 asientos; pero si el resto hubieran sido de 6 asientos, hubieran podido ir todos. ¿Cuántos hicieron la excursión?

A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 50

31. Se pesan 2 patos y 3 pollos, y luego 3 patos y 2 pollos. En ambos casos la balanza marcó 14 y 16 kilos, respectivamente. Si un pavo pesa el doble que un pato, halla el peso de un pavo.

A) 4 kg B) 8 kg C) 6 kg
D) 12 kg E) 10 kg

32. Se quiere colocar cierto número de fichas de modo que se forme un cuadrado completo. En la primera disposición sobran 8 fichas; formando el cuadrado con una ficha más por lado, faltan 23. ¿Cuántas son las fichas?

A) 223 B) 233 C) 243
D) 253 E) 240

33. La suma de dos números es 9 y la de sus cuadrados es 53. Halla la diferencia positiva de dichos números.

A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

34. La suma de las dos cifras que componen un número es igual a 5. Si se invierte el orden de las cifras de dicho número y se le suma 9, entonces se obtiene el número original. ¿Cuál es el número original aumentado en 11?

A) 54 B) 34 C) 43
D) 32 E) 23

35. Compré cierto número de libros por S/.40 y cierto número de plumas por S/.40. Cada pluma me costó S/.1 más que cada libro. ¿Cuántos libros compré y a qué precio, si el número de libros excede al de plumas en dos?

A) 10; S/.4 B) 10; S/.6 C) 8; S/.2
D) 8; S/.4 E) 10; S/.3

36. Jessica tiene el doble de lo que tiene Juana en dinero, luego Jessica le presta cierta suma a Juana, por lo que ahora Juana tiene el triple de lo que le queda a Jessica. Si el préstamo que pidió Juana excede en S/.6 a lo que tenía inicialmente, ¿con cuánto se quedó Jessica?

A) S/.12 B) S/.30 C) S/.18
D) S/.24 E) S/.48

37. Compré cierto número de libros a 5 libros por S/.6. Me quedé con 1/3 de los libros, y vendiendo el resto a 4 libros por S/.9 gané S/.9. ¿Cuántos libros compré?

A) 15 B) 8 C) 20
D) 30 E) 21

38. Un obrero trabajó durante 2 meses con su hijo en una misma fábrica. El primer mes, por 14 días del padre y 24 del hijo recibieron S/.118; el segundo mes, por 21 días del padre y 19 del hijo recibieron S/.143. ¿Cuál es la diferencia de jornales diarios entre el padre y el hijo?

A) S/.3 B) S/.1 C) S/.4
D) S/.5 E) S/.2

Claves

NIVEL 1	NIVEL 2		
1. A	10. B	19. A	28. C
2. D	11. E	20. C	29. D
3. A	12. C	21. B	30. E
4. B	13. B	22. D	31. B
5. E	14. E	NIVEL 3	32. B
6. C	15. A	23. B	33. B
7. C	16. A	24. A	34. C
8. C	17. C	25. B	35. A
9. D	18. E	26. A	36. C
		27. A	37. D
			38. A

Edades

DEFINICIÓN

En el proceso de resolución, se asigna una variable a la edad que se desea hallar, luego, si hubiera otras edades desconocidas se las representará en función de la variable ya asignada, o si es necesario con nuevas variables.
Se presentan dos casos:

Cuando interviene la edad de una sola persona

Ejemplo:
Dentro de 20 años tendré el triple de la edad que tuve hace 10 años. ¿Qué edad tuve hace 3 años?
Resolución:

Sea x la edad actual:

Hace 10 años	Edad actual	Dentro de 20 años
$x - 10$	x	$x + 20$

Según el enunciado: $x + 20 = 3(x - 10)$

$x + 20 = 3x - 30$

$x = 25$

$\therefore$ Hace 3 años tuve 22 años.

Cuando intervienen las edades de 2 o más personas

Ejemplo:
María tiene el triple de la edad de Jesús. Si dentro de 5 años la edad de María será el doble de la edad que Jesús tendrá en ese momento, ¿qué edad tiene María?
Resolución:

Sea x la edad de Jesús:

	Edad actual	Dentro de 5 años
María	$3x$	$3x + 5$
Jesús	x	$x + 5$

Por condición del problema: $3x + 5 = 2(x + 5)$

$3x + 5 = 2x + 10$

$x = 5$

$\therefore$ María tiene: $3(5) = 15$ años

Observación:
Sean las edades de 2 personas en el pasado, presente y futuro

	Pasado	Presente	Futuro
x	37	40	48
y	43	46	54

Diferencia de edades: 6 años ⇩, 6 años ⇩, 6 años ⇩

Suma en aspa:

$37 + 46 = 43 + 40$

$40 + 54 = 46 + 48$

$37 + 54 = 43 + 48$

Atención

Cuando hacemos referencia al tiempo pasado, este se debe restar respecto a la edad actual.
Ejemplo:
Sea "x" la edad actual, hace 5 años su edad era: $x - 5$



Recuerda

Cuando hacemos referencia al tiempo futuro, este se debe sumar respecto a la edad actual.
Ejemplo:
Sea x la edad actual, dentro de 5 años su edad será: $x + 5$



Nota

- La diferencia de edades entre dos personas permanece constante a través del tiempo:
  $43 - 37 = 6$
  $46 - 40 = 6$
  $54 - 48 = 6$
- La suma en aspa de valores ubicados simétricamente es constante:
  $37 + 46 = 43 + 40$
  $40 + 54 = 46 + 48$
  $37 + 54 = 43 + 48$

Problemas resueltos

1 Si al triple de la edad que tengo, le disminuyo mi edad aumentada en 8 años, tendría 36 años. ¿Qué edad tengo?

Resolución:

Sea x mi edad actual.

Por condición del problema:

$3x - (x + 8) = 36$

$3x - x - 8 = 36$

$2x = 44 \Rightarrow x = 22$

$\therefore$ Tengo 22 años.

2 Elisa es 6 años más joven que Iván. Hace 3 años Iván tenía él triple de la edad que tenía Elisa. Encuentra la edad de Iván.

Resolución:

Ordenamos la información en un cuadro:

	Hace 3 años	Edad actual
Iván	x – 3	(x)
Elisa	x – 9	x – 6

Por dato del problema:

$x - 3 = 3(x - 9)$

$x - 3 = 3x - 27$

$24 = 2x \Rightarrow x = 12$

$\therefore$ Iván tiene 12 años.

3 Miguel tiene 5 veces la edad de Miluska. Dentro de 7 años él tendrá el cuádruple de la edad de ella. ¿Qué edad tiene Miluska?

Resolución:

Ordenamos la información en un cuadro:

	Edad actual	Dentro de 7 años
Miguel	5x	5x + 7
Miluska	(x)	x + 7

Por dato del problema:

$5x + 7 = 4(x + 7)$

$5x + 7 = 4x + 28$

$x = 21$

$\therefore$ Miluska tiene 21 años.

4 Mario tiene el triple de la edad de Manuel. Dentro de 6 años, Mario tendrá 6 veces la edad que Manuel tenía hace 8 años. Determina sus edades actuales.

Resolución:

Según los datos:

	Hace 8 años	Edad actual	Dentro de 6 años
Mario		3x	3x + 6
Manuel	x – 8	x	

Por dato del problema:

$3x + 6 = 6(x - 8)$

$3x + 6 = 6x - 48$

$54 = 3x \Rightarrow x = 18$

Luego, las edades serán:

Manuel: 18 años, Mario: 54 años

5 La edad de José hace 9 años era los 2/3 de la edad que tendrá dentro de un año. ¿Qué edad tendrá José dentro de 3 años?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 9 años	Edad actual	Dentro de 1 año
José	x – 9	x	x + 1

Del enunciado: $x - 9 = \frac{2}{3}(x + 1)$

$3x - 27 = 2x + 2$

$x = 29$

$\therefore$ Dentro de 3 años tendrá 32 años.

6 Elena le dice a Roxana: "Cuando tú tengas la edad que yo tengo, mi edad será el doble de la edad que hoy tienes".
¿Cuál es la edad de Elena, sabiendo que las edades suman 40 años?

Resolución:

Según los datos:

	Presente	Futuro
Elena	x	2(40 – x)
Roxana	40 – x	x

doble

Suman 40

Sabemos que la diferencia de edades es constante a través del tiempo:

Luego: $x - (40 - x) = 2(40 - x) - x$

$x - 40 + x = 80 - 2x - x$

$5x = 120 \Rightarrow x = 24$

∴ Elena tiene 24 años.

7 Si al doble de mi edad se le quitan 13 años, se obtiene lo que me falta para tener 50 años. ¿Cuál es mi edad?

Resolución:

Sea x mi edad.

Lo que me falta para 50 años: $50 - x$

Por condición del problema:

$2x - 13 = 50 - x$

$3x = 63 \Rightarrow x = 21$

∴ Mi edad es 21 años.

8 Sara tiene 32 años. Su edad es el cuádruple de la edad que tenía Juan cuando Sara tenía la tercera parte de la edad que tiene Juan. ¿Qué edad tiene Juan?

Resolución:

Según los datos:

	Pasado	Presente
Juan	8	(x)
Sara	x/3	32

Aplicando suma en aspa:

$x + \frac{x}{3} = 8 + 32$

$\frac{4}{3}x = 40 \Rightarrow x = 30$

∴ Juan tiene 30 años.

9 Pedro le dice a Marco: "Mi edad es 45 años y es el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía los 2/3 de la edad que tú tienes actualmente. ¿Cuál es la edad de Marco?

Resolución:

Según los datos:

	Pasado	Presente
Pedro	$\frac{2}{3}x$	45
Marco	15	x

Aplicando suma en aspa:

$x + \frac{2}{3}x = 15 + 45$

$\frac{5}{3}x = 60 \Rightarrow x = 36$

∴ Marco tiene 36 años.

10 Hace 20 años la edad de un padre era el cuádruple de la edad de su hijo. Actualmente la edad del padre es el doble de la edad de su hijo. ¿Cuál será la edad del hijo dentro de 5 años?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 20 años	Edad actual	Dentro de 5 años
Padre	2x – 20	2x	
Hijo	x – 20	x	(x + 5)

Por condición del problema:

$2x - 20 = 4(x - 20)$

$2x - 20 = 4x - 80$

$60 = 2x \Rightarrow x = 30$

∴La edad del hijo dentro de 5 años será 35 años.

Actividades de razonamiento

1. La suma de edades de 10 personas es igual a 390. ¿Cuál era la suma de dichas edades hace 5 años?

A) 300 años B) 180 años C) 340 años
D) 170 años E) 200 años

2. Ana tiene 5 años menos que Alejandra. Si el doble de la edad de Ana más los 3/4 de la edad de Alejandra suman 67 años. ¿Qué edad tiene Ana?

A) 20 años B) 23 años C) 35 años
D) 27 años E) 30 años

3. La edad actual de un hijo es los 3/7 de la edad de su padre, dentro de 4 años, la mitad de la edad del padre sería igual a la del hijo. ¿Cuál es la edad del hijo?

A) 10 años B) 8 años C) 16 años
D) 12 años E) 15 años

4. Si al triple de la edad que tendré dentro de 4 años le sumo el cuádruple de la edad que tenía hace 9 años, resultará el séxtuplo de mi edad. ¿Qué edad tengo?

A) 20 años B) 17 años C) 22 años
D) 25 años E) 24 años

5. Hace 10 años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 8 años. ¿Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tuve hace 8 años?

A) 12 años B) 22 años C) 17 años
D) 15 años E) 20 años

6. Hace 6 años la edad de un tío era 8 veces la edad de su sobrino, pero dentro de 4 años será solo el triple. Calcula la suma de edades.

A) 10 años B) 25 años C) 50 años
D) 48 años E) 45 años

7. Hace 55 años la edad de Jesús era la sexta parte de la que tiene ahora. Halla la edad de Jesús dentro de 6 años.

A) 45 años B) 18 años C) 50 años
D) 72 años E) 40 años

8. Hace 8 años Jorge tenía 3 años menos que Javier y actualmente sus edades suman 27. ¿Qué edad tiene Javier?

A) 20 años B) 45 años C) 15 años
D) 10 años E) 30 años

9. Hace 5 años mi edad eran los 2/3 de la edad que tendré dentro de 5 años. ¿Qué edad tendré dentro de 5 años?

A) 25 años B) 30 años C) 35 años
D) 15 años E) 20 años

10. Si 3 veces la edad de mi hermano es 2 veces mi edad, y hace 3 años 3 veces su edad era la mía. ¿Cuántos años tengo?

A) 6 años B) 12 años C) 10 años
D) 15 años E) 8 años

11. Le preguntan por su edad a José y él responde: "Multipliquen por 3 los años que tendré dentro de 3 años y réstenle el triple de los que tenía hace 3 años y obtendrán precisamente los años que tengo". ¿Qué edad tiene ahora?

A) 13 años B) 22 años C) 18 años
D) 15 años E) 20 años

12. Si al doble de mi edad se le quitan 13 años, se obtendrá lo que me falta para tener 50 años. ¿Cuánto me falta para cumplir el doble de lo que tenía hace 5 años?

A) 12 años B) 15 años C) 14 años
D) 11 años E) 16 años

13. Juana le dijo a Milagros: "Yo tengo 5 años más de la edad que tú tenías cuando yo tenía 3 años menos de la edad que tienes, y cuando tú tengas el doble de la edad que tengo, nuestras edades sumarán 49 años". ¿Qué edad tiene Juana?

A) 6 años B) 8 años C) 12 años
D) 14 años E) 10 años

14. Frida tuvo su primer hijo a los 20 años, su segundo hijo a los 25 años y 7 años después a su tercer hijo. Si en 1996 la suma de las edades de los cuatro es 83 años. ¿En qué año nació Frida?

A) 1960 B) 1965 C) 1940
D) 1956 E) 1950

Claves

1. C	5. A	9. B	13. C
2. B	6. D	10. A	14. D
3. D	7. D	11. C	
4. E	8. C	12. D	

Reto



La edad de un padre es de "a" años, el hijo tiene "b" años menos que su padre, y el abuelo "c" años más que el padre. ¿Cuál será la suma de las edades de estas 3 personas dentro de "n" años?

Rpta.: $3(a + n) + c - b$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Hace 3 años tenía la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 21 años. ¿Dentro de cuántos años tendré el triple de la edad que tenía hace 6 años?

   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. Halla la edad de Andrés, sabiendo que si a la tercera parte de la edad que tendrá dentro de 3 años le restamos la tercera parte de la edad que tenía hace 3 años, se obtiene como resultado la novena parte de su edad actual.

   A) 15 años B) 23 años C) 13 años
   D) 18 años E) 28 años

3. Dentro de 5 años mi edad será igual a la edad que tú tienes actualmente, y al sumar nuestras edades en ese entonces, se obtendría 55 años. ¿Cuál es mi edad?

   A) 32 años B) 30 años C) 25 años
   D) 28 años E) 20 años

4. La edad de César es el cuádruple de la edad de Luz. Si hace 4 años la edad de César era 6 veces la edad que tenía Luz en ese tiempo, ¿qué edad tiene Luz?

   A) 10 años B) 15 años C) 20 años
   D) 18 años E) 13 años

5. Si al restarle el triple de la edad que mi hermana tenía hace 4 años del triple de la edad que ella tendrá dentro de 4 años, se obtiene como resultado el doble de su edad. ¿Qué edad tiene mi hermana?

   A) 13 años B) 12 años C) 15 años
   D) 10 años E) 17 años

6. La mitad de la edad de Toño equivale a la diferencia entre la edad que tendrá dentro de 10 años y la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Toño?

   A) 35 años B) 18 años C) 40 años
   D) 28 años E) 30 años

7. Si al doble de la edad que mi tío Juan tendrá dentro de 5 años le resto el doble de la edad que tenía hace 5 años, el resultado equivale a su edad. ¿Qué edad tiene mi tío?

   A) 21 años B) 23 años C) 17 años
   D) 25 años E) 20 años

8. Al preguntarle a mi primo por su edad, me respondió: "Si al cuádruplo de la edad que tendré dentro de 5 años le restas el cuádruplo de la edad que tuve hace 10 años, obtendrás mi edad". ¿Cuál es la edad de mi primo?

   A) 45 años B) 30 años C) 40 años
   D) 60 años E) 50 años

9. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo. Si la suma de ambas edades es 60 años. ¿Cuál es la edad del padre?

A) 40 años B) 65 años C) 50 años
D) 60 años E) 45 años

10. Hace 20 años la edad de un padre era el séxtuplo de la edad de su hijo. Actualmente la edad del padre solo es el doble de la edad de su hijo ¿cuál es la edad del hijo?

A) 45 años B) 35 años C) 25 años
D) 40 años E) 30 años

NIVEL 2

11. Ana le dijo a Carmen: "Yo tengo 5 años más de la edad que tú tenías cuando yo tenía 3 años menos de la edad que tienes, y cuando tú tengas el doble de la edad que tengo, nuestras edades sumarán 49 años". ¿Qué edad tiene Ana?

A) 10 años B) 12 años C) 15 años
D) 14 años E) 16 años

12. En 1990 la edad de Alex era cuatro veces la edad de Beto, en 1998 la edad de Alex fue el doble de la edad de Beto.
Halla la edad actual de Beto. (Año actual: 2003).

A) 15 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

13. Actualmente la edad de Martín es el cuádruple de la edad de José, pero dentro de 15 años, la edad de Martín será los 7/4 de la edad que tendrá José en ese entonces. ¿Cuántos años tenía Martín cuando José nació?



A) 15 B) 18 C) 21 D) 16 E) 12

14. Al preguntarle a Isabel por su edad respondió: "Si al año que cumplí 15 años le suman el año en que cumplí 20 años y si a este resultado le restan la suma del año en que nací con el año actual, obtendrán 17". ¿Cuál es la edad de Isabel?

A) 19 años B) 21 años C) 18 años
D) 20 años E) 22 años

15. La edad actual de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos. Hace 6 años la edad del padre era el triple de la suma de las edades que tenían sus hijos. ¿Dentro de cuántos años la suma de las edades de los tres será el doble de la edad actual del padre?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 18 E) 16

16. La suma de nuestras edades es 48 años. Dentro de 10 años la diferencia de nuestras edades será 16 años. ¿Cuál es la edad del mayor?

A) 35 años B) 30 años C) 37 años
D) 32 años E) 40 años

17. Mi hermano mayor nació 8 años antes que yo. Si dentro de 10 años nuestras edades sumarán 82 años, ¿cuál es la edad de mi hermano mayor?

A) 45 años B) 28 años C) 33 años
D) 40 años E) 35 años

18. María le dice a Teresa: "Mi edad es 30 años, y esta era el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes actualmente". ¿Cuál es la edad de Teresa?

A) 35 años B) 33 años C) 18 años
D) 27 años E) 44 años

19. Hace 20 años la edad de un tío era el cuádruplo de la edad de su sobrino. Actualmente la edad del tío es el doble de la edad de su sobrino. ¿Cuál será la edad del sobrino dentro de 5 años?

A) 30 años B) 40 años C) 50 años
D) 35 años E) 45 años

20. Carlos le dice a Pepe: "Mi edad es 52 años y era el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía los 2/3 de la edad que tú tienes actualmente". ¿Cuál es la edad de Pepe?

A) 36 años B) 24 años C) 28 años
D) 40 años E) 30 años

NIVEL 3

21. En el mes de octubre un estudiante sumó a los años que tenía los meses que ha vivido y obtuvo 398. ¿En qué mes nació?

A) Enero B) Marzo C) Febrero
D) Diciembre E) Junio

22. Ana le dijo a Luz: "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes; pero cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será 63 años". ¿Qué edad tenía Ana cuando Luz nació?

A) 6 años B) 7 años C) 8 años
D) 9 años E) 10 años

23. Las edades de tres hermanos, hace 2 años, estaban en la misma relación que 3; 4 y 5. Si dentro de 2 años serán como 5; 6 y 7, ¿qué edad tiene el menor?

A) 8 años B) 10 años C) 12 años
D) 6 años E) 7 años

24. Hace 2 años Isabel tenía **a** años. ¿Hace cuántos años tenía la tercera parte de la edad que tendrá en **b** años?

A) $2a - b + 4$ B) $2a + b - 4$

C) $\frac{1}{3}(2a - b + 4)$ D) $\frac{1}{3}(2a + b + 4)$

E) $\frac{1}{3}(2a + b - 4)$

25. Milagros le dice a Juana: "Yo tengo 35 años y mi edad era el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes". ¿Cuál es la edad de Juana?

A) 32 años B) 20 años C) 30 años
D) 28 años E) 21 años

26. Al ser preguntado David por su edad, contestó: "Si al doble de mi edad le quito 17 años, tendría lo que me falta para tener 100 años". ¿Qué edad tiene David?

A) 49 años B) 51 años C) 39 años
D) 29 años E) 17 años

27. Si a la mitad de la edad que tendrá Pepe dentro de 3 años, le restamos la mitad de la edad que tuvo hace 3 años, se obtiene la cuarta parte de su edad. ¿Qué edad tuvo hace dos años?

A) 13 años B) 12 años C) 11 años
D) 9 años E) 10 años

28. Cuando Lucho nació, Juan tenía 12 años. Hoy sus edades suma 38 años. ¿Cuál es la edad del menor?

A) 15 años B) 17 años C) 8 años
D) 13 años E) 20 años

29. En el mes de noviembre, el profesor de matemáticas sumó a los años que tenía el número de meses que ha vivido, obteniendo como resultado 418. ¿En qué mes es su cumpleaños?

A) Julio B) Octubre C) Enero
D) Agosto E) Septiembre

30. Hace 3 años Kelly tenía "a" años, dentro de 3 años Kelly tendrá "b" años. ¿Cuál es la edad actual de Kelly en función de "a" y "b"?

A) a . b años B) $\frac{(a-b)}{2}$ años

C) $\frac{a+b}{2}$ años D) (a + b) años

E) (a – b) años

Claves

NIVEL 1	9. E	17. E	25. E
1. B	10. C	18. C	26. C
2. D	NIVEL 2	19. D	27. E
3. E	11. B	20. A	28. D
4. A	12. B	NIVEL 3	29. E
5. B	13. A	21. C	30. C
6. C	14. C	22. B	
7. E	15. A	23. A	
8. D	16. D	24. C	

Cuatro operaciones

En este capítulo solo necesitamos conocer los principios fundamentales que rigen a la adición, sustracción, multiplicación y división.

A continuación veremos una serie de métodos que nos van a permitir una fácil comprensión de los problemas.

MÉTODO DEL CANGREJO

En este tipo de problemas se comienza a resolver desde el final, es decir, a partir del último resultado regresando hasta el inicio del problema, haciendo en cada caso la operación inversa a las operaciones indicadas.

Ejemplo 1:
Si a la edad que tiene tu padre lo multiplicas por 6; luego lo divides entre 10 y el cociente lo multiplicas por 4, añadiendo enseguida 42, obtendrías 162. ¿Cuál es la edad de tu padre?

Resolución:

Operaciones directas	Operaciones inversas
$\times 6$	$\div 6 = 50$
$\div 10$	$\times 10 = 300$
$\times 4$	$\div 4 = 30$
$+42$	$-42 = 120$
162	

$\therefore$ La edad de tu padre es 50 años.

Ejemplo 2:
Si al doble de un número entero positivo, lo disminuimos en 3, lo elevamos al cuadrado, para luego multiplicarlo por 4; y a este resultado le quitamos 3; elevando lo que resulta al cuadrado, obtenemos como respuesta 1. Halla el número.

Resolución:

Operaciones directas	Operaciones inversas
$\times 2$	$\div 2 = 2$
-3	$+3 = 4$
$(\ )^2$	$\sqrt{\ } = 1$
$\times 4$	$\div 4 = 1$
-3	$+3 = 4$
$(\ )^2$	$\sqrt{\ } = 1$
1	

$\therefore$ El número es 2.

Observación

Operaciones inversas

$+$	$-$
$-$	$+$
$\times$	$\div$
$\div$	$\times$
$(\ )^n$	$\sqrt[n]{\ }$
$\sqrt[n]{\ }$	$(\ )^n$



Atención

Este procedimiento también se puede realizar en forma horizontal, colocando arriba las operaciones directas y abajo las inversas.

$\times 6 \quad \div 10 \quad \times 4 \quad +42$

50 $\qquad\qquad\qquad$ 162

$\div 6 \quad \times 10 \quad \div 4 \quad -42$

300 $\quad$ 30 $\quad$ 120

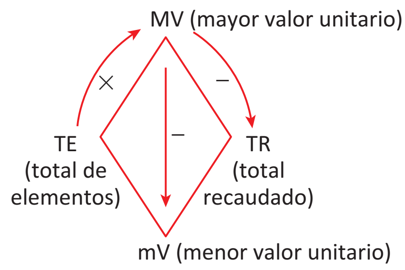


Nota

El procedimiento para hallar la incógnita se inicia en el último dato (cantidad final) y de ahí se retrocede aplicando operaciones inversas a las dadas, hasta obtener la cantidad inicial.

MÉTODO DEL ROMBO

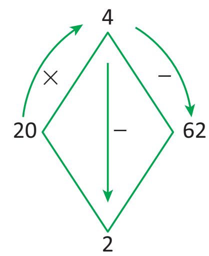
En este método los datos se ubican en los vértices de un rombo, en donde se indican mediante flechas la forma cómo operar.



$$\text{Incógnita} = \frac{\text{TE} \times \text{MV} - \text{TR}}{\text{MV} - \text{mV}}$$

Ejemplo 1:
En el parque de las leyendas hay leones y gorriones; si en total hay 20 cabezas y 62 patas; ¿cuántos gorriones hay?

Resolución:
Los leones tienen 4 patas y los gorriones 2.

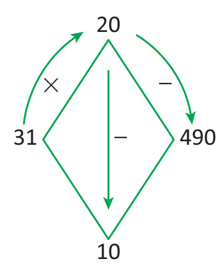


$$\text{n.° de gorriones} = \frac{20 \times 4 - 62}{4 - 2} = \frac{18}{2} = 9$$

∴ Hay 9 gorriones.

Ejemplo 2:
Debo pagar S/.490 con 31 billetes de S/.10 y S/.20. ¿Cuántos billetes de S/.10 debo emplear?

Resolución:



$$\text{n.° de billetes de S/.10} = \frac{31 \times 20 - 490}{20 - 10} = \frac{130}{10} = 13$$

∴ Hay 13 billetes de S/.10.

Importante

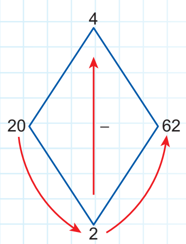
Para que un problema pueda ser resuelto por el método del rombo debe tener las siguientes características:

- Debe tener dos incógnitas.
- Presentar un valor numérico producido por la suma de las dos incógnitas (número total de elementos).
- Valor total de cada una de las incógnitas.



Nota

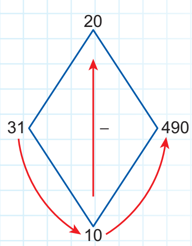
El n.° de leones es:



$$\text{n.° de leones} = \frac{20 \times 2 - 62}{2 - 4} = 11$$

Nota

También, n.° de billetes de S/.20:



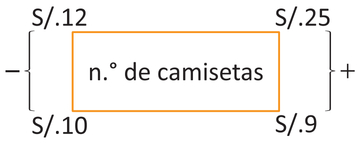
$$\text{n.° de billetes de S/.20} = \frac{31 \times 10 - 490}{10 - 20} = 18$$

MÉTODO DEL RECTÁNGULO

En este tipo de problemas participan dos cantidades excluyentes, que se comparan en 2 oportunidades originándose en un caso ganancia y en otro pérdida.

Ejemplo 1
Si vendo a S/.12 cada camiseta gano S/.25; pero si las vendiera a S/.10 perdería S/.9. ¿Cuántas camisetas tengo?

Resolución:

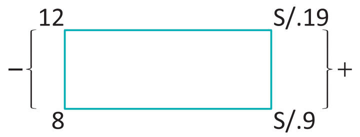


$$\text{n.° de camisetas} = \frac{25+9}{12-10} = \frac{34}{2} = 17$$

∴ Tengo 17 camisetas.

Ejemplo 2:
Para comprar 12 cuadernos me faltan S/.19, pero si compro 8 cuadernos me sobrarían S/.9. ¿Cuánto cuesta un cuaderno y cuánto dinero tengo?

Resolución:



$$\text{Costo del cuaderno} = \frac{19+9}{12-8} = \frac{28}{4} = \text{S/.}7$$

Dinero $= 12 \times 7 - 19 =$ S/.65

∴ El cuaderno cuesta S/.7 y tengo S/.65.

REGLA DE LA CONJUNTA

Esta regla consiste en formar con los datos una serie de equivalencias con la salvedad de que en una misma columna no deben existir dos datos de la misma especie. Luego se multiplican ordenadamente estas equivalencias y se halla el valor de la incógnita.

Ejemplo:
Por una sandía me dan 4 manzanas, por 2 manzanas recibo 3 mangos. ¿Cuántas sandías me darán por 24 mangos?

Resolución:

1 sandía	<>	4 manzanas
2 manzanas	<>	3 mangos
24 mangos	<>	x
1 . 2 . 24	<>	4 . 3 . x
4	<>	x

∴ Me darán 4 sandías.

Atención

Para poder aplicar este método, el problema debe presentar las siguientes características:
Deben participar dos cantidades excluyentes, una mayor que la otra, y deben compararse entre sí las dos cantidades, originándose en un caso, un sobrante (o ganancia) y en otro, un faltante (o pérdida).



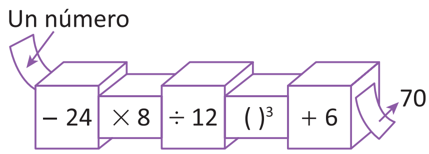
Recuerda

Los problemas sobre método del rectángulo se resuelven de la siguiente manera:
Lo que falta y lo que sobra se suman, las otras cantidades se restan y estos resultados se dividen.

Nota

La regla de la conjunta tiene por objeto reducir una cantidad a otra de diferentes especies, por medio de equivalencias que liguen la primera con la segunda.

1 Un número ingresa a una máquina y se somete a operaciones sucesivas, obteniéndose 70 como resultado. ¿Cuál fue el número?



Resolución:

Aplicamos el método del cangrejo:

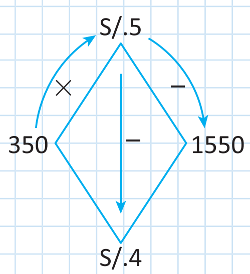
-24	$+24 = 30$
$\times 8$	$\div 8 = 6$
$\div 12$	$\times 12 = 48$
$(\ )^3$	$\sqrt[3]{\ } = 4$
$+6$	$-6 = 64$
	70

∴ El número es 30.

2 A una función de cine asistieron un total de 350 personas entre niños y niñas. Recaudaron S/.1550 debido a que cada niño pagó S/.5 y cada niña S/.4. Calcula la diferencia entre el número de niñas y niños.

Resolución:

Aplicamos el método del rombo:



$$\text{n.° de niñas} = \frac{350 \times 5 - 1550}{5 - 4} = \frac{200}{1} = 200$$

$$\text{n.° de niños} = 350 - 200 = 150$$

∴ Diferencia $= 200 - 150 = 50$

3 En una feria, por 8 melocotones dan 5 peras, por cada 10 peras dan 3 piñas; por cada 4 piñas dan 1 docena de naranjas; si 5 naranjas cuestan S/.16. ¿Cuánto pagará por 12 melocotones?

Resolución:

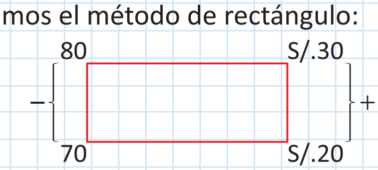
Aplicamos la regla de la conjunta:

8 melocotones	<>	5 peras
10 peras	<>	3 piñas
4 piñas	<>	12 naranjas
5 naranjas	<>	S/.16
x	<>	12 melocotones
8 . 10 . 4 . 5 . x	<>	5 . 3 . 12 . 16 . 12
5x	<>	108
x	<>	S/.21,6

4 Para ganar S/.30 en la rifa de una pelota se hicieron 80 boletos, pero no se vendieron más que 70, originándose una pérdida de S/.20. ¿Cuánto valía la pelota?

Resolución:

Aplicamos el método de rectángulo:



$$\text{Costo del boleto} = \frac{30 + 20}{80 - 70} = \frac{50}{10} = 5$$

Costo de la pelota $= 70(5) + 20 =$ S/.370

5 Un tanque se demora 4 días para vaciarse completamente. Cada día se desocupa la mitad más 1 litro de lo que había el día anterior. ¿Cuántos litros contenía el tanque?

Resolución:

Aplicamos el método del cangrejo:

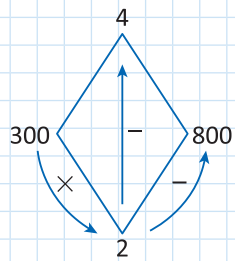
$\div 2$	$\times 2 = 30$
-1	$+1 = 15$
$\div 2$	$\times 2 = 14$
-1	$+1 = 7$
$\div 2$	$\times 2 = 6$
-1	$+1 = 3$
$\div 2$	$\times 2 = 2$
-1	$+1 = 1$
	0

∴ Inicialmente habían 30 L.

6 En la factoría "Yayito" hay entre bicicletas y autos 300 vehículos, y el número de llantas es 800. ¿Cuántos autos hay?

Resolución:

Se debe tener en cuenta que el auto tiene 4 ruedas y la bicicleta 2 ruedas.
Aplicamos el método del rombo:



$$\text{n.° de autos} = \frac{300 \times 2 - 800}{2 - 4} = \frac{-200}{-2} = 100$$

7 En la librería "Joselito" 14 lapiceros cuestan lo mismo que 6 plumones, 8 plumones lo mismo que 5 motas, 3 motas cuestan S/.35. ¿Cuánto tengo que gastar para adquirir 16 lapiceros?

Resolución:

Aplicamos la regla de la conjunta:

14 lapiceros	<>	6 plumones
8 plumones	<>	5 motas
3 motas	<>	S/.35
x	<>	16 lapiceros
14 . 8 . 3 . x	<>	6 × 5 × 35 × 16
x	<>	5 . 5 . 2
x	<>	S/.50

8 Los alumnos del profesor "Lucho" deciden obsequiarle una Laptop. Si cada uno diera S/.100, faltarían S/.320; pero si cada uno da S/.120, sobrarían S/.120. ¿Cuánto cuesta la Laptop?

Resolución:



$$\text{n.° de alumnos} = \frac{320 + 120}{120 - 100} = \frac{440}{20} = 22$$

Costo de la Laptop = 120 × 22 – 120 = 2520

∴ La Laptop cuesta S/.2520.

9 Tres jugadores: A, B y C convienen que el perdedor triplicará el dinero de los otros dos. Perdieron en forma secuencial y quedaron con S/.90, S/.30 y S/.55 respectivamente. ¿Con cuánto empezó cada uno?

Resolución:

Hacemos uso de un cuadro.

	A	B	C	Total
Inicio	120	40	15	175
1	10	120	45	175
2	30	10	135	175
3	90	30	55	175

- Como en la 3.ª partida "C" triplicó las cantidades de A y B, entonces en la partida anterior debieron tener S/.30 y S/.10 respectivamente, y como todo debe sumar S/.175, "C" tuvo 135.
- Como en la 2.ª partida "B" triplicó las cantidades de A y C, entonces en la partida anterior debieron tener S/.10 y S/.45 respectivamente, y como todo debe sumar S/.175, "B" tuvo 120.
- Como en la 1.ª partida "A" triplicó las cantidades de B y C, entonces inicialmente debieron tener S/.40 y S/.15 respectivamente, y como todo debe sumar S/.175, "A" tuvo 120.

∴ Empezaron con S/.120, S/.40 y S/.15 respectivamente.

10 En un lejano pueblo todos veneran a un santo milagroso, pues triplica el dinero de los fieles con la sola condición de entregarle S/.40 de limosna por cada milagro. Si después de acudir a él por tres veces consecutivas, Henry termina con S/.560. ¿Cuánto tenía al principio?

Resolución:

Aplicamos el método del cangrejo.

40

1.er milagro	×3	÷3 = 40
	–40	+40 = 120
2.° milagro	×3	÷3 = 80
	–40	+40 = 240
3.er milagro	×3	÷3 = 200
	–40	+40 = 600

S/.560

∴ Al principio tenía S/.40.

Actividades de razonamiento

1. Para formar un kilogramo de monedas, entre monedas de S/.1 y S/.5, cuyos pesos respectivamente son 30 g y 25 g se han empleado 37 monedas. ¿Cuántas de estas monedas son de 30 g?

A) 12 B) 20 C) 15 D) 17 E) 22

2. En un examen de 50 preguntas se califica cada respuesta correcta con 4 puntos, y cada respuesta incorrecta se califica con un punto en contra. Un alumno contesta todas las preguntas y obtiene 80 puntos, ¿cuántas preguntas contestó de forma incorrecta?

A) 35 B) 24 C) 30 D) 20 E) 26

3. Un padre de familia le da S/.2 a su hijo por cada problema de habilidad matemática que resuelve. Pero si la respuesta está equivocada el hijo debe devolver a su padre S/.1. Si luego de resolver 12 problemas, el niño no recibe ni un nuevo sol, ¿cuántos problemas resolvió correctamente?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 4 E) 8

4. Mi propina la multiplico por 3, a este producto le aumento S/.28, a la suma la dividimos por 2, al cociente obtenido le agrego 5 y al resultado le extraigo la raíz cuadrada, obteniendo finalmente 5 como resultado. ¿Cuánto dinero tenía de propina al inicio?

A) S/.4 B) S/.6 C) S/.8
D) S/.10 E) S/.12

5. Una persona apuesta a los caballos, logrando siempre duplicar su apuesta pero con la condición de pagar luego S/.140 de comisión. Si realiza tres apuestas en forma consecutiva y luego se queda con S/.60, ¿con cuánto dinero empezó a apostar?

A) S/.100 B) S/.130 C) S/.150
D) S/.200 E) S/.180

6. Si al número total de patas de conejo que hay en un corral se le multiplica por 3, al producto se le extrae la raíz cúbica y luego al resultado se le resta 3, a la diferencia se la eleva al cubo, obteniendo un número al cual luego de sumarle 3 y dividirlo entre 3, se obtiene 10 como resultado final. ¿Cuántos conejos hay?

A) 13 B) 16 C) 18 D) 15 E) 20

7. Sabiendo que 6 kilogramos de sandía cuesta lo mismo que 4 kilogramos de papaya, 3 kilogramos de papaya valen lo mismo que 2 kilogramos de plátanos; 5 kilogramos de plátanos cuestan 18 soles. ¿Cuánto costarán 10 kilogramos de sandía?

A) 24 soles B) 20 soles C) 18 soles
D) 22 soles E) 16 soles

8. En una ferretería los precios son los siguientes: 3 desarmadores cuestan lo mismo que un alicate, 3 alicates cuestan tanto como 1 martillo. ¿Cuántos martillos cuestan lo mismo que 117 desarmadores?

A) 18 B) 13 C) 12 D) 16 E) 15

9. En el supermercado "PLAZA TOTÓ" las frutas se venden de la siguiente manera: 5 plátanos al mismo precio que 6 duraznos; 4 duraznos al mismo precio que 10 naranjas; 12 naranjas al mismo precio que 2 piñas; 10 piñas cuestan 30 soles. ¿Cuánto se pagará por 2 plátanos y 12 duraznos?

A) S/.15 B) S/.12 C) S/.20
D) S/.18 E) S/.22

10. Un campesino pensaba así: "Si vendo todos los sacos de arroz a S/.35 cada uno, perdería S/.120, pero si los vendo a S/.42 cada uno, ganaría S/.90. ¿Cuál es el costo de todos los sacos de arroz?

A) S/.1800 B) S/.1400 C) S/.1200
D) S/.1170 E) S/.1320

11. Si una señora compra 3 macetas con el dinero que tiene, le sobraría S/.12. Entonces, decide comprar una maceta más y le sobra solo S/.4. ¿Cuánto tenía la señora?

A) S/.32 B) S/.30 C) S/.28
D) S/.36 E) S/.42

12. Si Julio le entrega a cada sobrino S/.8, le faltaría S/.8, pero si a cada uno le da S/.7, a uno de ellos solo le puede dar S/.5. ¿Cuánto tenía Julio?

A) S/.38 B) S/.40 C) S/.35
D) S/.42 E) S/.30

13. Pepe tiene tanto dinero como para comprar 24 chocolates y aún le sobra S/.15, pero si quisiera comprar 36 chocolates, le faltaría S/.9. ¿Cuánto dinero tiene Pepe?

A) S/.56 B) S/.52 C) S/.48
D) S/.72 E) S/.63

14. El trabajo de 3 hombres equivale al de 12 máquinas eléctricas, el trabajo de 5 máquinas eléctricas equivale al trabajo de 15 máquinas manuales y el trabajo de una máquina manual requiere de una inversión de S/.150. ¿Cuál es la inversión requerida para el trabajo de 10 hombres?

A) S/.5000 B) S/.6000 C) S/.3800
D) S/.6200 E) S/.5400

Claves

1. C	5. B	9. D	13. E
2. B	6. C	10. D	14. B
3. D	7. E	11. D	
4. A	8. B	12. B	

Reto



Se tienen tres aulas A, B y C, con cantidades diferentes de alumnos; de cada una de ellas se pasan a las otras dos aulas, tantos alumnos como hay en ese momento en cada una de estas, en orden alfabético, quedando al final cada una con 120 alumnos. ¿Cuántos alumnos tenía el aula A inicialmente?

Rpta.: 195

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Antonio tiene 15 animales entre conejos y gallinas, ¿cuántos conejos hay, si se cuentan en total 48 patas?
A) 5 B) 8 C) 9 D) 6 E) 7

2. En una oficina hacen una colecta para regalarle una torta a la secretaria. Si cada empleado colabora con S/.8, sobraría S/.6; si cada uno da S/.6, faltarían S/.12 para comprar la torta. ¿Cuánto cuesta la torta?

A) S/.75 B) S/.66 C) S/.80
D) S/.60 E) S/.70

3. Un número se aumenta en 40, el resultado se divide por 4, al cociente obtenido se le aumenta 5, al resultado se le extrae la raíz cuadrada, el resultado se multiplica por 15 y el producto obtenido se divide por 25, resultando 3. Halla el número.
A) 40 B) 60 C) 70 D) 55 E) 50

4. En una librería, los costos son los siguientes: una tijera cuesta lo mismo que 5 lapiceros, 3 lapiceros cuestan igual que 6 borradores. ¿Cuántas tijeras darán por 90 borradores?
A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 9

5. Ricardo colecciona arañas y escarabajos, contando en total 20 cabezas y 150 patitas. ¿Cuántas arañas hay en la colección?
A) 12 B) 15 C) 13 D) 8 E) 5

6. Un profesor reparte hojas entre sus alumnos. Si da 5 hojas a cada uno, le sobran 12 hojas; si da 8 hojas a cada uno, le faltarían 6 hojas. ¿Cuántos alumnos tiene el profesor?
A) 9 B) 8 C) 10 D) 6 E) 7

7. Cada vez que un granjero saca trigo de un silo, extrae la mitad del contenido y 5 barriles más. Si después de 3 extracciones quedan 10 barriles de trigo en el silo, ¿cuántos barriles de trigo había inicialmente en el silo?
A) 180 B) 120 C) 150 D) 220 E) 200

8. Sabiendo que 2 kg de carne cuestan lo mismo que 3 kg de arroz, 4 lapiceros valen lo mismo que 5 kg de arroz, 3 libros cuestan S/.150 y 8 lapiceros cuestan lo mismo que 4 libros. ¿Cuánto costarán 6 kg de carne?
A) S/.200 B) S/.180 C) S/.160
D) S/.150 E) S/.250

9. Una tarde se observa a varios niños jugando en el parque con sus bicicletas y triciclos. Se cuentan en total 860 ruedas y 608 pedales. ¿Cuántos triciclos hay en el parque?
A) 380 B) 470 C) 252 D) 220 E) 520

10. Se desea rifar un auto y para ello se pone a la venta cierto número de boletos. Si se vende cada uno en S/.8, se pierde S/.600; y si se vende cada boleto en S/.10, se gana S/.1400. ¿Cuánto costó el auto?
A) S/.7500 B) S/.6200 C) S/.8200
D) S/.8600 E) S/.9300

NIVEL 2

11. En un taller hay 40 vehículos entre camiones de 8 llantas, autos y motos. Se cuentan en total 210 llantas. ¿Cuántos autos hay, si el número de camiones es el triple del número de motos?
A) 22 B) 20 C) 26 D) 24 E) 15

12. Si la edad de Clara la multiplicamos por 3, al resultado le sumamos 12, a dicha suma la dividimos entre 8 y al cociente obtenido le restamos 4, resultando ahora 2 años; ¿qué edad tiene Clara?
A) 14 B) 12 C) 10 D) 13 E) 9

13. En una gran jaula hay palomas y codornices, si cada paloma cuesta S/.8 y cada codorniz S/.13, ¿cuántas palomas hay en la jaula, si por la venta de las 40 aves que hay en dicha jaula se podría recaudar S/.410?
A) 17 B) 20 C) 22 D) 18 E) 19

14. Un profesor fue al teatro con sus alumnos y observa que si compra entradas de S/.24 le faltaría dinero para 5 de ellos, entonces decide comprar entradas de S/.20 y así ingresan todos y aún le sobran S/.16. ¿Cuántos alumnos fueron al teatro?
A) 33 B) 32 C) 31 D) 34 E) 35

15. Carmencita observa que 5 caramelos cuestan igual que 2 chocolates, que 9 chocolates cuestan igual que 4 chupetes, que 6 chupetes cuestan igual que 5 paquetes de galleta y que 4 paquetes de galleta cuestan igual que 3 paquetes de *waffers*. ¿Cuántos caramelos cuestan igual que 2 paquetes de *waffers*?
A) 13 B) 20 C) 16 D) 22 E) 18

16. Pepe tiene cierta suma de dinero (en S/.). Si dicha cantidad la multiplicamos por 4, al producto le restamos 80, a la diferencia la dividimos por 3, al cociente le aumentamos 9, para finalmente, luego de extraerle la raíz cuadrada a la suma, obtener 7. ¿Cuánto dinero tenía Pepe al inicio?
A) S/.42 B) S/.50 C) S/.40 D) S/.30 E) S/.35

17. Un padre quiere comprar 15 chocolates y le faltan S/.10, pero si compra 10 chocolates le sobran S/.15. ¿Cuánto dinero tenía?
A) S/.70 B) S/.75 C) S/.60 D) S/.65 E) S/.80

18. Un entomólogo tiene una colección de 27 insectos, entre moscas y arañas. En total se cuentan 186 "patitas". ¿Cuántas moscas hay en la colección?
A) 12 B) 18 C) 15 D) 9 E) 16

19. Un carpintero cobra lo mismo por confeccionar 4 sillas o 3 sillones, también cobra lo mismo por confeccionar 9 sillones o 2 mesas. Si 3 mesas cuestan S/.450, ¿cuánto cuestan 6 sillas?



A) S/.100 B) S/.120 C) S/.220
D) S/.150 E) S/.180

20. En una tienda una jarra cuesta lo mismo que 6 vasos, 3 vasos lo mismo que 2 tazas, 5 tazas lo mismo que 3 platos. ¿Cuántos platos cuestan lo mismo que 5 jarras?
A) 9 B) 11 C) 10 D) 8 E) 12

NIVEL 3

21. Un comerciante no tiene los precios de ciertos artículos, solo una referencia: 2 cuadernos cuestan tanto como 9 lapiceros; 4 lapiceros tanto como una regla; 3 reglas tanto como 4 tajadores, y 3 tajadores tanto como 10 plumones. ¿Cuántos cuadernos cuestan tanto como 5 plumones?
A) 1 B) 5 C) 3 D) 2 E) 4

22. Ricardo duplica el dinero que llevaba y de inmediato gasta S/.100. Con lo que le queda vuelve a duplicarlo y luego gasta S/.160. Si aún le quedan S/.80, ¿cuánto tenía inicialmente?
A) S/.60 B) S/.100 C) S/.90
D) S/.110 E) S/.80

23. Un señor quiso dar una limosna a un grupo de ancianos, si les daba S/.5 a cada uno, faltaría S/.30 y si les daba S/.3 a cada uno, sobraría S/.70. ¿Cuánto dinero tenía el señor?
A) S/.200 B) S/.160 C) S/.240
D) S/.220 E) S/.180

24. A cierto espectáculo asisten 300 personas entre damas y caballeros. Se recaudó S/.1140. Cada caballero pagó S/.5 y cada dama pagó S/.3. ¿Cuál es la diferencia entre el número de damas y caballeros?
A) 60 B) 80 C) 50 D) 100 E) 70

25. Con cierto número se hacen las siguientes operaciones: se eleva al cubo, al resultado se le suma 9 y luego se extrae la raíz cuadrada, luego se divide entre 3, luego se resta 1 y por último se eleva al cuadrado, obteniéndose 16. Halla el número.
A) 6 B) 9 C) 5 D) 8 E) 7

26. Dos jóvenes han recorrido en total 64 metros, dando entre los dos 100 pasos. Si cada paso del segundo mide 50 cm y cada paso del primero 70 cm. ¿Cúantos pasos más que el segundo ha dado el primero?
A) 50 B) 10 C) 30 D) 25 E) 40

27. Un artesano lleva a vender sus lámparas; pensando que si las vende a S/.25 cada una, se podría comprar una cocina y aún le sobrarían S/.36, pero si las vende a S/.18 cada una le faltarían S/.13 para comprar la cocina. ¿Cuál es el costo de la cocina?



A) S/.135 B) S/.120 C) S/.128
D) S/.113 E) S/.139

28. Para la rifa de un televisor plasma se acuerda vender 500 boletos y ganar así S/.800. Si solo se venden 420 boletos y se pierde S/.160, ¿cuál es el costo del televisor?
A) S/.3400 B) S/.5200 C) S/.2000
D) S/.6000 E) S/.6300

Claves

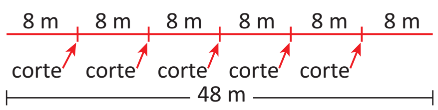
NIVEL 1			
1. C	8. B	15. E	22. D
2. B	9. C	16. B	23. D
3. A	10. D	17. D	24. A
4. E	NIVEL 2	18. C	25. A
5. B	11. B	19. D	26. E
6. D	12. B	20. E	27. E
7. C	13. C	NIVEL 3	28. B
	14. A	21. A	

Cortes, estacas y pastillas

CORTES

Ejemplo:
Se tiene un alambre de 48 m de longitud. Si se quiere obtener pedazos de 8 m cada uno, ¿cuántos cortes se harán?

Resolución:



$$\text{n.° de pedazos} = \frac{48}{8} = 6$$

Se observa que:
Número de cortes = 6 − 1 = 5

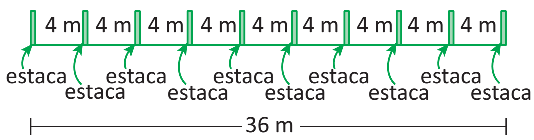
Luego:

$$\text{Número de cortes} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada pedazo}} - 1$$

ESTACAS

Ejemplo:
Se tiene una cerca de 36 m de longitud. Si se quiere colocar estacas cada 4 m, ¿cuántas se colocarán?

Resolución:



$$\text{n.° de partes} = \frac{36}{4} = 9$$

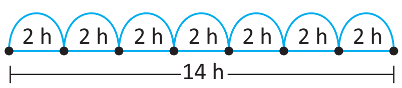
Se observa que:
Número de estacas = 9 + 1 = 10

Luego:

$$\text{Número de estacas} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada parte}} + 1$$

PASTILLAS

Ejemplo:
Un paciente debe tomar una pastilla cada 2 h, durante 14 h, ¿cuántas pastillas tomará en total?



Se observa que: Número de pastillas = 7 + 1 = 8

Entonces: Número de pastillas = Número de intervalos + 1

Luego:

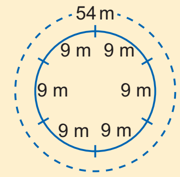
$$\text{Número de pastillas} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Intervalo de tiempo entre pastilla y pastilla}} + 1$$

Atención

Para figuras cerradas se cumple la siguiente fórmula:

$$\text{n.° de cortes} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada pedazo}}$$

Ejemplo:



$$\text{n.° de cortes} = \frac{54}{9} = 6$$

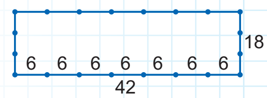


Nota

Para figuras cerradas se cumple la siguiente fórmula:

$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro de la figura}}{\text{Longitud de cada parte}}$$

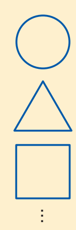
Ejemplo:



$$\text{n.° de estacas} = \frac{2(42 + 18)}{6} = 20$$



Recuerda



Se llama figura cerrada a una circunferencia, un triángulo, un cuadrado, un rectángulo u otro polígono.

Problemas resueltos

1 Un hojalatero para cortar una cinta metálica de $(k^3 - 1)$ m de largo, cobra S/.$(k - 1)$ por cada corte que hace. Si las cortes lo hace cada $(k^2 + k + 1)$ m. ¿Cuánto cobrará por cortar toda la cinta?

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{n.° de cortes} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada corte}} - 1$$

$$\text{n.° de cortes} = \frac{k^3 - 1}{k^2 + k + 1} - 1$$

Recordar: $k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1)$

Luego: $\text{n.° de cortes} = \dfrac{(k - 1)(k^2 + k + 1)}{(k^2 + k + 1)} - 1$

$\text{n.° de cortes} = k - 2$

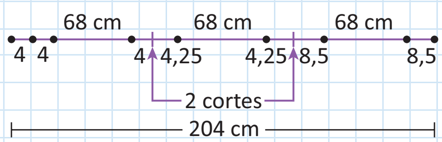
Finalmente: $\text{Costo} = (\text{n.° de cortes})(k - 1)$

$\therefore\ \text{Costo} = \text{S/.}(k - 2)(k - 1)$

2 Se corta un listón de madera de 204 cm de longitud en 3 partes iguales, luego en cada parte se realizan nuevos cortes y se obtienen en el primero pedazos de 4 cm, en el segundo de 4,25 cm y en el tercero pedazos de 8,5 cm. Halla el número total de cortes.

Resolución:

Veamos gráficamente:



Calculando el número de cortes de cada parte:

1.er pedazo: $\text{n.° de cortes} = \dfrac{68}{4} - 1 = 16$

2.° pedazo: $\text{n.° de cortes} = \dfrac{68}{4,25} - 1 = 15$

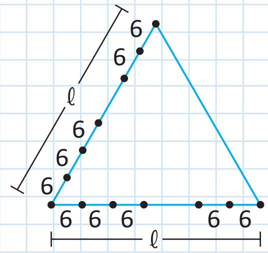
3.er pedazo: $\text{n.° de cortes} = \dfrac{68}{8,5} - 1 = 7$

$\therefore$ n.° total de cortes $= 2 + 16 + 15 + 7 = 40$

3 ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno cuya forma es de un triángulo equilátero de área igual a $10^8\sqrt{3}$. 9 m^2, si las estacas se colocan cada 6 m?

Resolución:

Gráficamente:



Por dato:

$$A = 10^8\sqrt{3} \cdot 9$$

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 10^8\sqrt{3} \cdot 9$$

$$\ell^2 = 10^8 \cdot 9 \cdot 4$$

$$\ell = 10^4 \cdot 6$$

Luego:

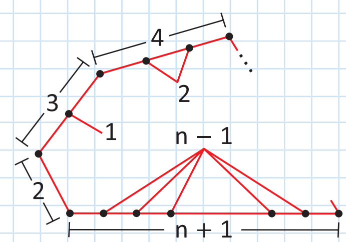
$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro del triángulo}}{\text{Longitud entre cada estaca}}$$

$$\text{n.° de estacas} = \frac{3(6 \cdot 10^4)}{6}$$

$\therefore$ n.° de estacas $= 3 \cdot 10^4$

4 Se quiere cercar con claveles un jardín, cuya forma es la de un polígono de n lados, colocándose en el primer lado 2 claveles, en el siguiente lado 3 claveles, y así hasta completar el enésimo lado con n + 1 claveles. ¿Cuántos claveles colocaría en total?

Resolución:



$$\text{n.° de claveles} = 0 + 1 + 2 + ... + (n - 1) + \text{n.° vértices}$$

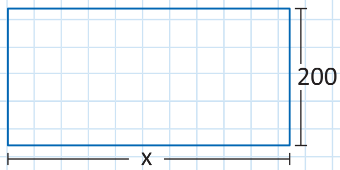
$$= 1 + 2 + ... + (n - 1) + n$$

$$= \frac{n(n + 1)}{2}$$

5 En el perímetro de un terreno rectangular se han colocado 160 estacas separadas entre sí cada 8 m. ¿Cuál es la relación entre el ancho y el largo, si el ancho mide 200 m?

Resolución:

Haciendo un gráfico:



Aplicamos:

$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro del triángulo}}{\text{Longitud entre cada estaca}}$$

$$160 = \frac{2x + 400}{8}$$

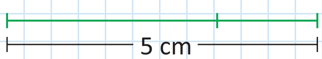
$$1280 = 2x + 400$$

$$2x = 880 \Rightarrow x = 440 \text{ m}$$

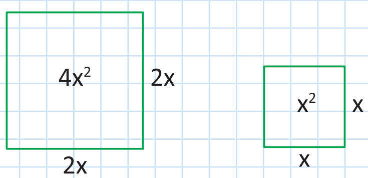
$$\text{Luego: } \frac{\text{Ancho}}{\text{Largo}} = \frac{200}{440} = \frac{5}{11}$$

6 Un trozo de alambre de 5 cm se corta en 2 partes de tal manera que el cuadrado que se forma doblando una parte tiene 4 veces el área del cuadrado que se forma doblando la otra parte. La longitud de la parte más larga es:

Resolución:



Por condición del problema:



$$2p = 8x \qquad 2p = 4x$$

Luego: $8x + 4x = 5$

$$12x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{12}\text{cm}$$

$$\text{Longitud largo} = 8\left(\frac{5}{12}\text{cm}\right) = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

7 Una enfermera le da a su paciente una pastilla cada 45 minutos. ¿Cuántas pastillas necesita ella para cubrir un turno de 9 horas; si ella le da al paciente la primera pastilla al empezar y la última tableta al terminar el turno?

Resolución:

Sabemos que:

9 horas <> 540 minutos

Aplicamos:

$$\text{n.° de pastillas} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Duración de cada turno}} + 1$$

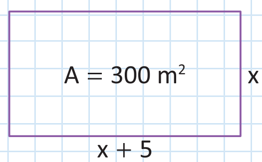
$$\text{n.° se pastillas} = \frac{540}{45} + 1$$

$$\therefore \text{ n.° de pastillas} = 13$$

8 Se quiere cercar un terreno rectangular de 300 m^2 de área, cuyo largo excede en 5 m a su ancho, colocando estacas cada 3,5 m. ¿Cuántas estacas se colocarán?

Resolución:

Veamos gráficamente:



$$A = 300 \text{ m}^2$$
$$x(x + 5) = 300$$
$$x(x + 5) = 15 \,.\, 20$$
$$x = 15$$

Luego:

$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro de la figura}}{\text{Longitud entre cada estaca}}$$

$$= \frac{2(15 + 20)}{3,5}$$

$$= \frac{70}{3,5} = 20$$

Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada, cuya área es igual a 6400 m^2, si las estacas se colocan cada 8 m?

A) 45 B) 50 C) 40 D) 48 E) 54

2. ¿Cuántos árboles se pueden colocar a lo largo de una avenida que tiene 5(b + 2) m de longitud, si estos se colocan cada b/3 m?

A) 15 +13/b B) 15 + b/30 C) 16 + b/30
D) 16 + 30/b E) 16 + b/2

3. Para cercar un terreno cuyo perímetro es $m^2 - 3m - 10$ se necesitan (m + 2) estacas. Halla la separación entre estaca y estaca.

A) (m + 2) B) (m – 5) C) (m + 5)
D) (m – 2) E) (m – 4)

4. Un hojalatero para cortar una varilla metálica de 80 m de longitud cobra S/.4 por cada corte que hace; si los cortes los hace cada 5 m, ¿cuánto cobrará por toda la varilla?

A) S/.60 B) S/.50 C) S/.56
D) S/.65 E) S/.54

5. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma rectangular de "72 M" m de largo por "48 N" m de ancho, si las estacas se colocan cada "3M + 2N" m?

A) 48 m B) 50 m C) 54 m
D) 36 m E) 32 m

6. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno cuya forma es la de un triángulo equilátero, de área igual a $32\,400\sqrt{3}$ m^2, si las estacas se colocan cada 12 m?

A) 120 B) 108 C) 100
D) 96 E) 90

7. Con un grupo de personas se ha formado un cuadrado, donde en un lado hay 12 personas, en otro hay 18 personas, en otro hay 25 personas y en el último lado 9 personas.
¿Cuántas personas hay en el grupo si en cada vértice hay una persona?

A) 50 B) 60 C) 54 D) 58 E) 65

8. Se ha formado un pentágono donde en un lado hay a personas, en otro b personas, en otro c personas, en otro d personas y en el último lado e personas. ¿Cuántas personas hay en total si en cada vértice hay una persona?

A) a + b + c + d + e + 5 B) a + b + c + d + e – 10
C) a + b + c + d + e – 5 D) a + b + c + d + e + 10
E) a + b + c + d + e – 15

9. A Jimena el doctor le recetó que tomara 3 pastillas cada 6 horas durante 8 días. ¿Cuántas pastillas tomó Jimena?

A) 99 B) 98 C) 112 D) 108 E) 84

10. Un jardinero cobra S/.3 por plantar un árbol. Si planta árboles alrededor de un terreno rectangular de 50 m de largo y 30 m de ancho cada 5 m, de modo que en cada esquina vaya un árbol, ¿cuánto cobra el jardinero?

A) S/.98 B) S/.108 C) S/.102 D) S/.96 E) S/.116

11. Para controlar el tránsito en una avenida de 1,8 km de longitud, la policía ha previsto colocar patrulleros cada 75 m, de los cuales irá uno en cada extremo de la avenida. ¿Cuántos policías serán necesarios para controlar dicha avenida si en cada patrullero hay 5 policías?

A) 100 B) 105 C) 115 D) 135 E) 125

12. Un albañil cobra S/.25 por construir una columna. Si se desea cercar un terreno rectangular de 55 m de largo y 35 m de ancho, colocando columnas cada 5 m, de modo que haya una columna en cada esquina, ¿cuánto cobrará por construir todas las columnas?

A) S/.900 B) S/.960 C) S/.950
D) S/.1050 E) S/.1200

13. El doctor recetó a Kelly que tomara 2 pastillas para la tos cada 4 horas y 3 pastillas para la infección cada 8 horas durante una semana. ¿Cuántas pastillas tomará en total y cuánto gastará por todo el tratamiento, si cada pastilla cuesta S/.0,5?

A) 152 y S/.168 B) 156 y S/.84 C) 84 y S/.76
D) 152 y S/.76 E) 156 y S/.76

14. El doctor recetó a Melanie que tomara, durante 5 días, 3 pastillas cada 6 horas para evitar el dolor y 2 pastillas cada 4 horas para evitar la infección. ¿Cuántas pastillas tomará Melanie y cuánto gastará en total, si cada pastilla cuesta S/.1,60?

A) 125 y S/.150 B) 125 y S/.200 C) 75 y S/.200
D) 75 y S/.225 E) 125 y S/.225

Claves

1. C	5. A	9. A	13. D
2. D	6. E	10. D	14. B
3. B	7. B	11. E	
4. A	8. C	12. A	

Reto



A lo largo de una avenida de “2b” kilómetros de longitud se van a plantar postes equidistantes uno del otro, desde el inicio de la avenida hasta el final; si para los “b” primeros km ya se han plantado n postes, ¿cuántos postes serán necesarios plantar para concluir el trabajo?

Rpta.: n – 1

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. A lo largo de un pasaje se desea plantar árboles cada 6 m, de tal modo que aparezca un árbol en cada extremo del pasaje que además tiene 138 metros de longitud. ¿Cuántos árboles se requieren para tal fin?



A) 23 B) 26 C) 27 D) 24 E) 25

2. Carolina está en cama por una enfermedad, por lo que el médico le recomendó tomar cada 6 horas una pastilla durante 5 días. ¿Cuántas pastillas tomó si lo hizo desde el inicio del primer día hasta el final del último?

A) 19 B) 18 C) 22 D) 20 E) 21

3. ¿Cuántos cortes deben darse a una soga de 48 metros de largo para tener pedazos de 6 metros de largo?

A) 9 B) 5 C) 7 D) 8 E) 6

4. Una enfermera le da una pastilla cada 24 minutos a su paciente durante 8 horas. ¿Cuántas pastillas tomará el paciente?

A) 23 B) 21 C) 20 D) 19 E) 22

5. Se debe colocar una cortina en una ventana amplia, para lo cual la cortina debe tener 9 m, de largo. Si los hojalillos deben estar separados 10 cm, uno del otro, ¿cuántos hojalillos se colocará?

A) 91 B) 90 C) 92 D) 89 E) 93

6. En una pista de salto con vallas hay 15 de estas, separadas por una distancia de 4 m. ¿Cuál es la longitud entre la primera y la última valla?



A) 58 m B) 64 m C) 52 m
D) 60 m E) 56 m

7. En la parte exterior de una tienda se han colocado en paralelo 13 bicicletas, si la distancia de la primera a la última bicicleta es de 4,8 m, calcula la separación entre cada bicicleta.



A) 50 cm B) 40 cm C) 20 cm
D) 45 cm E) 42 cm

8. ¿Cuántos cortes deben darse a un aro de 30 metros de longitud para tener pedazos de 5 metros de longitud?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 7 E) 5

9. Se tiene un terreno rectangular cuyo perímetro es 60 m. ¿Cuántos postes deberían colocarse cada 3 metros, si uno de estos mide 2 metros de longitud?

A) 22 B) 21 C) 20
D) 19 E) 22

10. Alrededor de una mesa circular se ubica sillas cada dos metros, si el perímetro de la mesa es 16 m, ¿cuántas personas se pueden sentar como máximo en la mesa?

A) 12 B) 8 C) 9
D) 11 E) 10

NIVEL 2

11. Una varilla de fierro ha sido seccionada en pedazos de 24 cm de largo. Si se hicieron 11 cortes, ¿cuál era la longitud de la varilla?

A) 290 cm B) 288 cm C) 300 cm
D) 241 cm E) 240 cm

12. Una regla de madera de 270 cm ha sido cortada 17 veces. ¿Qué longitud tienen las reglitas resultantes?

A) 15 cm B) 17 cm C) 16 cm
D) 12 cm E) 10 cm

13. Hemos trozado una madeja de lana logrando pedazos de 8 cm, cada uno; si para esto fue necesario obtener 20 cortes, ¿cuál fue la longitud inicial de la madeja?

A) 170 cm B) 182 cm C) 179 cm
D) 168 cm E) 155 cm

14. Ocho postes de teléfono están situados a una distancia de 5 m cada uno del otro. ¿Cuál es la distancia del primer al último poste?



A) 42 m B) 40 m C) 45 m
D) 39 m E) 35 m

15. En una autopista existen puentes peatonales en los kilómetros 3 y 33. Se desea instalar dos puentes más entre los dos anteriores a igual distancia. ¿Cada cuántos kilómetros se instalarán dichos puentes?

A) 10 km B) 8 km C) 12 km
D) 15 km E) 14 km

16. Sara compra un frasco conteniendo pastillas, y tiene que tomarlas durante los 3 días que está en cama, a razón de dos pastillas cada 3 horas; si empezó a tomarlas apenas empezó su reposo hasta que culminó, ¿cuántas pastillas contenía el frasco?

A) 26 B) 40 C) 50 D) 30 E) 24

17. ¿Cuántos cortes, debe darse a 6 aros de L/3 metros de longitud, para tener pedazos de 2 metros?

A) L/2 B) L + 1 C) L – 1
D) L/6 E) L

18. A una soga de 60 metros se hacen 11 cortes para tener pedazos de 5 metros de largo. ¿Cuántos cortes deben hacerse si se tomara la mitad del largo de la soga?

A) 7 B) 4 C) 6 D) 8 E) 5

19. Se va electrificar una avenida de 3 km de largo, con la condición que en uno de sus lados, los postes se colocarán cada 30 metros y en el otro lado cada 20 metros. Si los postes empezaron a colocarse desde que empieza la avenida, ¿cuántos postes se necesitan en total?

A) 248 B) 249 C) 251 D) 252 E) 250

20. Un sastre para cortar una cinta de tela de 20 metros de largo, cobra S/.10 por cada corte que hace. Si los cortes los hace cada 4 metros, ¿cuánto cobrará por toda la cinta?



A) S/.40 B) S/.60 C) S/.70
D) S/.30 E) S/.50

NIVEL 3

21. Se desea plantar postes cada 15 m a lo largo de una avenida de 645 m. Si se nos ha cobrado S/.308 por el total de mano de obra. ¿Cuántos nos han cobrado por plantar cada poste; sabiendo que hay uno al inicio y otro al final de la avenida?

A) S/.11 B) S/.7 C) S/.9
D) S/.10 E) S/.8

22. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada cuya área es igual a 40 000 m^2, si las estacas se colocan cada 5 metros?

A) 140 B) 200 C) 170
D) 150 E) 160

23. Se desea cercar un terreno rectangular de 16 m $\times$ 24 m, para lo cual es conveniente hacer una serie de columnas a una distancia de 2 m, una de otra; si el costo de cada columna es de S/.35, indica el costo que origina levantar todas estas columnas.

A) S/.1500 B) S/.1200 C) S/.1400
D) S/.1600 E) S/.1300

24. El ancho de un terreno es 40 m. Si en todo el perímetro se colocan 80 estacas cada 5 metros, calcula el largo de dicho terreno.

A) 200 m B) 160 m C) 170 m
D) 190 m E) 180 m

25. ¿Cuántos cortes debe darse a una soga de $(k^2 - 1)$ metros de largo para tener pedazos de $(k - 1)$ metros de largo?

A) $2k - 1$ B) $k - 1$ C) $2k$
D) $k + 1$ E) k

26. Para cortar una pieza de madera en 2 partes cobran S/.20. ¿Cuántos cobrarán como mínimo para cortarlo en 4 partes?

A) S/.100 B) S/.80 C) S/.40
D) S/.20 E) S/.60

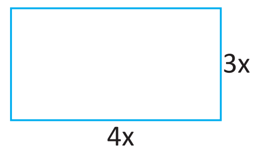
27. Se ha formado un triángulo con personas, donde en un lado hay 6 personas, en el segundo lado hay 8 personas y en el tercer lado hay 5 personas. ¿Cuántas personas hay en total, si en cada vértice hay una persona?

A) 16 B) 18 C) 15
D) 17 E) 19

28. Se tiene una figura hexagonal de lados iguales, cada uno de los cuales mide 21 cm. ¿Cuántos puntos podemos marcar a lo largo de su perímetro, si entre ellos debe haber una distancia de 3 cm?

A) 45 B) 42 C) 41
D) 44 E) 40

29. El terreno rectangular de la figura que se muestra tiene un área de 768 m^2 y se desea cercar colocando estacas cada 4 m. ¿Cuántas estacas se necesitarán?



A) 24
B) 26
C) 28
D) 30
E) 27

30. Para cercar un terreno de forma cuadrada se han utilizado $16(m^2 - 1)$ estacas de 2 metros de altura. Si las estacas se colocan cada $(m - 1)$ metros. Calcula el lado del terreno.



A) $(m - 1)^2$ B) $(m^2 - 1)$
C) $(m^2 + 1)$ D) $[2(m - 1)]^2 . (m + 1)$
E) $2(m - 1)(m + 1)$

Claves

NIVEL 1
1. D
2. E
3. C
4. B
5. A
6. E
7. B
8. A
9. C
10. B

NIVEL 2
11. B
12. A
13. D
14. E
15. A
16. C
17. E
18. C
19. D
20. A

NIVEL 3
21. B
22. E
23. C
24. B
25. E
26. C
27. A
28. B
29. C
30. D

Criptoaritmética

DEFINICIÓN

Llamada también aritmética oculta. El objetivo es reconstruir operaciones matemáticas, las cuales tienen cantidades representadas ya sea por medio de letras o asteriscos.

Ejemplos:

1. En la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd}\ + \\ \overline{bcd} \\ \overline{cd} \\ d \\ \hline \overline{dcc8} \end{array}$$

$\overline{abcd}$ está formado por 4 cifras diferentes y $d < 7$. Calcula: $\overline{bc} - \overline{ad}$

Resolución:

- En la columna de las unidades: $d + d + d + d = ...8$
  $4d = ...8 \Rightarrow d = 2$ ó $d = 7$
  como $d < 7$ (dato) $\Rightarrow d = 2$
- En la columna de las decenas: $c + c + c = ...c$
  $3c = ...c \Rightarrow c = 0$ ó $c = 5$
  Como $\overline{cd}$ es sumando $(c \neq 0) \Rightarrow c = 5$
  Entonces $c + c + c = 5 + 5 + 5 = 15$ → se lleva
- En la columna de las centenas: $1 + b + b = ...5$
  $2b = ...4 \Rightarrow b = 2$ ó $b = 7$
  $b \neq d \Rightarrow b \neq 2$ (por dato) $\Rightarrow b = 7$
  Entonces $1 + b + b = 1 + 7 + 7 = 15$ → se lleva
- En la columna de las unidades de millar: $1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$

  Finalmente: $\overline{bc} - \overline{ad} = 75 - 12 = 63$

2. En la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{mmmm}\ \times \\ 38 \\ \hline 44440 \\ \overline{n6p65} \\ \hline \overline{q11090} \end{array}$$

Calcula: $\dfrac{\overline{pq} - \overline{mn}}{\overline{mn}}$

Resolución:

- De la multiplicación: $8 \times m = ...0 \Rightarrow m = 5$
- Reemplazando el valor de "m":

$$\begin{array}{r} 5555\ \times \\ 38 \\ \hline 44440 \\ 16665 \\ \hline 211090 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 1 \\ p = 6 \\ q = 2 \end{cases}$$

- Piden: $\dfrac{\overline{pq} - \overline{mn}}{\overline{nn}} = \dfrac{62 - 51}{11} = \dfrac{11}{11} = 1$

Recuerda

Cuando se multiplica una cifra par por una cifra desconocida y se conoce en que cifra termina el producto, existen dos posibles valores.

Ejemplos:

$6 \times a = ...4 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 4 \end{cases}$

$8 \times a = ...6 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ a = 2 \end{cases}$



Nota

Cuando se multiplica una cifra impar por una cifra desconocida y se conoce en que cifra termina el producto, existe un solo valor.

Ejemplos:

- $3 \times a = ...1 \Rightarrow a = 7$
  $3 \times 7 = 21$
- $3 \times a = ...4 \Rightarrow a = 8$
  $3 \times 8 = 24$
- $7 \times a = ...3 \Rightarrow a = 9$
  $7 \times 9 = 63$



Importante

Cuando se multiplica la cifra 5 por una cifra desconocida y se conoce en que cifra termina el producto, existen varios valores.

Ejemplos:

- $5 \times a = ...0 \Rightarrow a$ es par
  $a = \{2; 4; 6; 8\}$
- $5 \times a = ...5 \Rightarrow a$ es impar
  $a = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Problemas resueltos

1 En la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overline{a96}\ + \\ \overline{27b} \\ \hline \overline{7c4} \end{array}$$

Calcula: $(a - 3b)^2 - c^3$

Resolución:

En las unidades:

$6 + b = ...4 \Rightarrow b = 8$

En las decenas:

$9 + 7 = ...c$

$16 = ...c \Rightarrow c = 6$

En las centenas:

$1 + a + 2 = 7$

$a + 3 = 7 \Rightarrow a = 4$

Reemplazando:

$(a - 3b)^2 - c^3 = (4 - 3(8))^2 - 6^3$

$= (-20)^2 - 216$

$= 400 - 216 = 184$

2 En la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 586\ \times \\ a \\ \hline \overline{4cb2} \end{array}$$

Calcula: $\sqrt[b+6]{\overline{ac} - a}$

Resolución:

De los datos se tiene:

$6a = ...\ 2$

Entonces $a = 2 \lor a = 7$

• Si $a = 2 \Rightarrow$ $\begin{array}{r} 586\ \times \\ 2 \\ \hline 1172 \end{array}$

→ No cumple debe ser 4

• Si $a = 7 \Rightarrow$ $\begin{array}{r} 586\ \times \\ 7 \\ \hline 4102 \end{array}$

→ sí cumple $\therefore a = 7$

Como: $\overline{4cb2} = 4102$

$c = 1, b = 0$

Reemplazando:

$\sqrt[b+6]{\overline{ac} - a} = \sqrt[0+6]{71 - 7} = \sqrt[6]{64} = 2$

3 Sabiendo que:

$\overline{SAM} = \dfrac{534}{Z} = \dfrac{691}{N}$; O = cero,

Calcula: SAM . ZON

Resolución:

Del dato:

$\overline{SAM} = \dfrac{534}{Z} \Rightarrow \overline{SAM} \times Z = 534$

$\overline{SAM} = \dfrac{691}{N} \Rightarrow \overline{SAM} \times N = 691$

Reemplazando:

$$\begin{array}{r} \overline{SAM}\ \times \\ \overline{ZON} \\ \hline 691 \\ 000 \\ 534 \\ \hline 54091 \end{array}$$

$691 \rightarrow \overline{SAM} \times N$

$534 \rightarrow \overline{SAM} \times Z$

4 Si: $P^P = \overline{AB}$ y $Y^Y = \overline{ACD}$

Halla: $\dfrac{A + B + C + D}{Y - P}$

Resolución:

De los datos

$P^P = \overline{AB}$

↓

$3^3 = 27 \Rightarrow P = 3; A = 2; B = 7$

$Y^Y = \overline{ACD}$

↓

$4^4 = 256 \Rightarrow y = 4, A = 2;\ C = 5; D = 6$

Reemplazando:

$\dfrac{A + B + C + D}{Y - P} = \dfrac{2 + 7 + 5 + 6}{4 - 3} = 20$

5 Si se conoce que:

$$\begin{array}{r} \overline{ade}\ + \\ \overline{bde} \\ \overline{cde} \\ \hline 1281 \end{array}$$

Calcula: $(a + b + c - d - e)^4$

Resolución:

De las unidades: $e + e + e = \ldots 1$
$3e = \ldots 1 \Rightarrow e = 7$
De las decenas: $2 + d + d + d = \ldots 8$
$3d = \ldots 6 \Rightarrow d = 2$
De las centenas: $a + b + c = 12$
Reemplazando:
$(a + b + c - d - e)^4 = (12 - 2 - 7)^4 = 3^4 = 81$

6 En la siguiente multiplicación, cada asterisco representa a una cifra:

```
  4 5 6 ×
    a b
  -----
  * 3 * *
  4 * 6
  -------
  5 * * *
```

Calcula: $\overline{ab}^{\,b-a}$

Resolución:

En la multiplicación que se plantea $a = 1$

```
    4 5 6 ×
      1 b
  -------
  c 3 * *
  4 5 6   → 1 × 456
  -------
  5 * * *
```

Además $c + 4 = 5 \Rightarrow c = 1$

con lo cual la multiplicación queda de la siguiente manera:

```
    4 5 6 ×
      1 b
  -------
  1 3 * *
  4 5 6
  -------
  5 * * *
```

Luego, $456 \times b = 13**$

$b = 3$

Reemplazando: $\overline{ab}^{\,b-a} = 13^{3-1} = 13^2 = 169$

7 Calcula la suma de las cifras del dividendo.

```
 * * * | 9
 * 6     * *
 ---
 – * 2
   * *
   – –
```

Resolución:

De la división que se plantea:

```
 * * * | 9
 * 6     a b
 ---
 – * 2
   * 2
   – –
```

Se observa que: $9 \times a = \ldots 6$ → 4

También: $9 \times b = *2$ → 8

Luego: dividendo $= \overline{ab} \times 9 = 48 \times 9 = 432$

Finalmente: suma de cifras $= 4 + 3 + 2 = 9$

8 Calcula la suma de cifras del dividendo en la siguiente división:

```
 * * * * | 3
 * 4       * * *
 ---
   * 2
   * *
   ---
     * 5
     * *
     – –
```

Resolución:

De la división se plantea:

```
 * * * * | 3
 * 4       a b c
 ---
   * 2
   * *
   ---
     * 5
     * 5
     – –
```

Se observa que:
$3 \times a = *4$ → 8

También: $3 \, . \, c = *5$ → 5

Reconstruyendo la operación:

```
 * * * * | 3
 * 4       8 b 5
 ---
   * 2
   * 1
   ---
     1 5
     1 5
     – –
```

Entonces: $3 \times b = *1$ → 7

Luego: dividendo $= \overline{8b5} \times 3 = 875 \times 3 = 2625$

Finalmente: suma de cifras
$= 2 + 6 + 2 + 5 = 15$

Actividades de razonamiento

1. Si: $A + \overline{AA} + \overline{AAA} + \overline{AAAA} = 7404$

Calcula: $A^2 + A + 1$

A) 33 B) 43 C) 45 D) 36 E) 41

2. Si: $\overline{...xyz} \times 999 = ...164$

Calcula: $x + y^2 + z$

A) 23 B) 32 C) 16 D) 35 E) 28

3. Si: $\overline{AA} + \overline{BB} + \overline{CC} = \overline{ABC}$

Calcula: $(A + B - C)^3$

A) 5 B) 7 C) 4 D) 8 E) 10

4. Si: $\overline{ROSA} \times 99 = ...1403$

Calcula: $R + O + S + A$

A) 10 B) 14 C) 16 D) 12 E) 26

5. Completa la operación (b es un número par y a un número impar).

Si:

$$\begin{array}{r} 235\times \\ \underline{ab} \\ **** + \\ **** \\ \hline **56* \end{array}$$

Halla: $a \times b$

A) 54 B) 30 C) 42 D) 36 E) 45

6. Si:

$$\begin{array}{r} \overline{8a5} - \\ \overline{b69} \\ \hline \overline{40c} \end{array}$$

Calcula: $\overline{abc} + \overline{cba}$

A) 1535 B) 1450 C) 1393
D) 1427 E) 1312

7. Sabiendo que a; b y c son 3 cifras diferentes (a > b > c), en la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overline{6a} + \\ \overline{3b} \\ \overline{8c} \\ \hline 194 \end{array}$$

Calcula: $\overline{abc} - \overline{bca}$

A) 96 B) 122 C) 132 D) 108 E) 117

8. En la suma siguiente:

$$\begin{array}{r} \overline{a58} + \\ \overline{12b} \\ \hline \overline{4c5} \end{array}$$

Calcula: $a - 2b + 3c$

A) 13 B) 15 C) 17 D) 7 E) 18

9. Si se sabe que: $\overline{CA} = \dfrac{144}{M} = \dfrac{252}{A}$

Calcula: $\sqrt{\overline{CA} \times \overline{MA} - 92}$

A) 80 B) 40 C) 50 D) 70 E) 60

10. Calcula la suma de cifras del cociente en la siguiente división:

```
* * * * | 9
* 3       * * *
- * 7
  * *
   * 7
   * *
   - -
```

A) 21 B) 19 C) 13 D) 15 E) 17

11. En la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \; + \\ \overline{ab} \\ a \\ \hline 471 \end{array}$$

Calcula: $\overline{aca} + \overline{baba}$

A) 2878 B) 2888 C) 2858
D) 2868 E) 2778

12. Si se conoce que:

$$\begin{array}{r} \overline{pst} \; + \\ \overline{qst} \\ \overline{rst} \\ \hline 1522 \end{array}$$

Calcula: $p + q + r - t - s$

A) 7 B) 9 C) 11 D) 4 E) 2

13. Reconstruye la siguiente división y da como respuesta la suma de cifras del dividendo.

```
1 * * * | * 3
* * 7     * 4
- - 6 *
    5 *
    * 2
```

A) 10 b) 12 C) 14 D) 16 E) 18

14. Calcula: $\overline{SAT} + \overline{TAS}$

Si: $\overline{LEN} - \overline{TAS} = \overline{NEL}$

A) 1189 B) 1089 C) 1098
D) 1079 E) 1099

Claves

1. B 5. A 9. B 13. A
2. A 6. C 10. D 14. B
3. D 7. D 11. A
4. E 8. A 12. E

Reto



Calcula la suma de las cifras del dividendo en la siguiente división:

```
* * * * * * * | * *
* *             8 * *
- * * *
  * * *
  - - - * * *
        * * *
        - - -
```

Rpta.: 33

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si: $\overline{ad} + \overline{bd} + \overline{cd} = 142$
   Calcula: $\sqrt{a + b + c - d}$
   A) 12 B) 8 C) 3 D) 9 E) 5

2. Si se sabe que:
   $\overline{MA} = 1 + 2 + 3 + ... + 9$,
   Calcula: $\overline{MAMA} + \overline{AMA}$
   A) 4090 B) 5075 C) 5090
   D) 6090 E) 5080

3. Si $\overline{ab} \times \overline{ba} = 574$
   Halla: $a + b$
   A) 13 B) 9 C) 5 D) 11 E) 7

4. Si: $\overline{b53c} + \overline{a6b} + \overline{7ca} = \overline{61cb}$
   Halla: $a - b + 2c$
   A) 16 B) 8 C) 12 D) 10 E) 14

5. Halla la suma de las cifras del resultado de $\overline{pqr} \times \overline{stu}$, sabiendo que:
   $\overline{pqr} \times s = 639$
   $\overline{pqr} \times t = 426$
   $\overline{pqr} \times u = 852$
   A) 22 B) 19 C) 18 D) 25 E) 28

6. Si: $3 \times \overline{SABER} = \overline{ABER3}$
   Halla: $S + A + B + E + R$
   A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

7. Si: $\overline{UNI} = 11(U + N + I)$
   Calcula: $U - N + I$
   A) 0 B) 4 C) 9 D) 12 E) 8

8. Si: $\overline{MAT} = 5 \times M \times A \times T$
   Halla: $(\overline{AM})^2$
   A) 2604 B) 3061 C) 5184
   D) 3600 E) 5041

NIVEL 2

9. Si: $\overline{MM} + \overline{AA} + \overline{LL} = 275$
   El máximo valor de $M \times A \times L$ es:
   A) 512 B) 576 C) 648 D) 729 E) 144

10. Si: $\overline{BNJHB} + \overline{JN1N} = \overline{HJH62}$
    Halla: $B + N + J + H$
    A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

11. Calcula $\overline{bcc}$, sabiendo que es menor que 500 y $\overline{ab0} + \overline{a0c} + \overline{bc} + c = \overline{bcc}$.

A) 255 B) 250 C) 314 D) 215 E) 315

12. Halla: $x + y + z$

Si: $\overline{pmn} - \overline{nmp} = \overline{xyz}$

A) 7 B) 9 C) 18 D) 13 E) 15

13. Si: $\overline{abc} \times 999 = ...451$, halla: $a + b + c$

A) 17 B) 18 C) 21 D) 23 E) 25

14. Si: $6q = \overline{mn}$

$2q = p$

Halla: $\dfrac{\overline{mnp}}{q}$; $m \neq n \neq p \neq q$

A) 58 B) 60 C) 62 D) 64 E) 68

15. Halla: $P + U + C$

Si: $\overline{PP} + \overline{UU} + \overline{CC} = \overline{PUC}$

A) 19 B) 15 C) 17 D) 18 E) 13

16. Si: $\overline{abc} \times 7 = \overline{ca9b}$

Calcula: $a - b + c$, si $c < a < b$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. Calcula: $a + b$, si $\overline{aabb} \times 77 = ...041$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

NIVEL 3

18. Si: $\overline{BATA} + \overline{BATA} = \overline{MANTO}$, $O \neq$ cero, $A \neq B$

Halla: $B + A + T + M + A + N$

A) 35 B) 37 C) 41 D) 32 E) 29

19. Si: $\dfrac{1000 - \overline{abc}}{\overline{bc}} = a^{-1}$

Determina: $a - b + c$

A) 9 B) 18 C) 0 D) 10 E) 12

20. Calcula $m + n + p$ si:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
m & n & m & n & 1 & \underline{\;n\;\;m\;} \\
* & * & * & & & 6\;\;6\;\;p \\
\hline
& m & n & n & & \\
& * & * & * & & \\
\hline
& & m & p & 1 & \\
& & * & * & * & \\
\hline
& & - & - & - &
\end{array}$$

A) 12 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

21. Si: $\overline{MUY} \times S = 635$

$C \times \overline{MUY} = 508$

$J \times \overline{MUY} = 381$, siendo $O =$ cero, determina la suma de las cifras del resultado de:

$\overline{MUY} \times \overline{JOCOSO}$

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

22. Halla el valor de $\overline{bc0f}$, sabiendo que es el mayor posible y satisface la siguiente suma:

$\overline{abcd} + \overline{cbe} = \overline{bc0f}$

Además, letras diferentes representan cifras diferentes.

A) 1908 B) 9305 C) 9107
D) 8907 E) 9145

23. Calcula la suma de cifras del dividendo en la siguiente división:

```
* * * |7
* 1   ----
---
  * 5
  * *
  ---
  - -
```

A) 9 B) 12 C) 13 D) 11 E) 10

24. Halla el mayor valor que puede tomar la suma siguiente:

$$\begin{array}{r} \overline{BEBE}\,+ \\ \overline{MEME} \\ \hline \overline{ROROO} \end{array}$$

Donde: O = cero

A) 10 100 B) 50 500 C) 40 400
D) 60 600 E) 30 300

25. En la operación que se indica, cada letra diferente es una cifra diferente, aunque ninguna es 2 ni 3. Determina el valor de T + R + E + S,

$$\begin{array}{r} \overline{DOS}\,+ \\ \overline{DOS} \\ \hline \overline{TRES} \end{array}$$

Sabiendo que $\overline{TRES}$ es $\overset{\circ}{3}$ (UNI 2008-II).

A) 21 B) 12 C) 15 D) 19 E) 14

26. Sabiendo que:

$$\begin{array}{r} \overline{p72}\,+ \\ \overline{5a8} \\ \overline{86m} \\ \hline 2387 \end{array}$$

Calcula: $\overline{mama} + \overline{papa}$

A) 16 868 B) 16 068 C) 16 968
D) 17 968 E) 16 698

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3	
1. C	8. E	9. B	15. D	18. B	22. C
2. C		10. E	16. B	19. C	23. D
3. C		11. A	17. E	20. B	24. A
4. B		12. C		21. D	25. B
5. C		13. B			26. C
6. D		14. C			
7. A					

Promedios

Nota

El promedio de un conjunto de datos, es una cantidad representativa, cuyo valor se encuentra entre el menor y el mayor valor.

DEFINICIÓN

El promedio de un conjunto de números, es una cantidad que se encuentra entre el menor y mayor de los números.

Sean las n cantidades: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$

P el promedio, entonces: $\underbrace{a_1}_{\text{Menor valor}} < P < \underbrace{a_n}_{\text{Mayor valor}}$

Nota

Para una cantidad de datos, no todos iguales:

MA > MG > MH

Todos iguales:

MA = MG = MH

PROMEDIO O MEDIA ARITMÉTICA

Sean n cantidades: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n$

$$PA \text{ o } MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

Ejemplo:
Halla el promedio aritmético de: 23; 29; 25 y 27.

Resolución:

$$PA = \frac{23 + 29 + 25 + 27}{4} = \frac{104}{4} = 26$$



Atención

Sean los datos a y b:

MA	MG	MH
$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{ab}$	$\frac{2ab}{a+b}$

Solo para dos datos se cumple:

$MG^2 = MA \cdot MH$

PROMEDIO O MEDIA GEOMÉTRICA

Sean n cantidades: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n$

$$PG \text{ o } MG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots a_n}$$

Ejemplo:
Halla el promedio geométrico de: 8; 27 y 125.

Resolución:

$$PG = \sqrt[3]{8 \times 27 \times 125} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 5^3} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

Observación

Sean los datos a y b:
$(a-b)^2 = 4(MA+MG)(MA-MG)$

Observación:
$MH(a; b; c) = \dfrac{3abc}{ab + bc + ac}$



PROMEDIO O MEDIA ARMÓNICA

Sean n cantidades: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n$

$$PH \text{ o } MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Ejemplo:
Halla el promedio armónico de: 2; 3 y 7.

Resolución:

$$PH = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}} = \frac{3}{\frac{41}{42}} = \frac{126}{41}$$

Problemas resueltos

1 Calcula la MA de dos números sabiendo que su MH es igual a 8 y su MG es igual a 12.

Resolución:

Aplicando: $MG^2 = MA \times MH$

Reemplazando: $12^2 = MA \times 8$

$144 = 8 \times MA$

$\therefore\ MA = 18$

2 El promedio aritmético de 5 números es P, si aumentamos un sexto número el promedio aritmético será "P + 3", ¿cuál es este sexto número?

Resolución:

Sean los 5 números: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$

Por dato del problema:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = P$$

$$\Rightarrow\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5P$$

Sea a_6 el sexto número:

Luego:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6}{6} = P + 3$$

$$5P + a_6 = 6P + 18$$

$$\therefore\ a_6 = P + 18$$

3 Halla el promedio:

$$\underbrace{a;\ a;\ a;\ \dots;\ a}_{b \text{ veces}};\ \underbrace{b;\ b;\ b;\ \dots;\ b}_{a \text{ veces}}$$

Resolución:

$$\text{Promedio} = \frac{a(b) + b(a)}{b + a} = \frac{2ab}{a + b}$$

4 La MA de 9 números pares consecutivos es 17. Halla la MG entre el mayor y el menor de dichos números.

Resolución:

Sean los 9 números:

$(x + 2), (x + 4), (x + 6), \dots, (x + 18)$

Por dato del problema:

$$\frac{(x + 2) + (x + 4) + \dots + (x + 18)}{9} = 17$$

Obs.: $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n\ \Rightarrow\ S = n(n + 1)$

En el problema: $\dfrac{9x + 9(10)}{9} = 17$

$$9x + 90 = 153$$

$$9x = 63\ \Rightarrow\ x = 7$$

Luego: n.° menor: $x + 2 = 9$

n.° mayor: $x + 18 = 25$

Finalmente:

$MG(25; 9) = \sqrt{25 \times 9} = 15$

5 La media aritmética de a y b es 8, la media aritmética de b y c es 11, y la media aritmética de a y c es 14. ¿Cuál es la media aritmética de a, b y c?

Resolución:

$MA(a; b) = 8 \Rightarrow \dfrac{a + b}{2} = 8$

$\Rightarrow a + b = 16$ ...(I)

$MA(b; c) = 11 \Rightarrow \dfrac{b + c}{2} = 11$

$\Rightarrow b + c = 22$ ...(II)

$MA(a; c) = 14 \Rightarrow \dfrac{a + c}{2} = 14$

$\Rightarrow a + c = 28$ ...(III)

Sumando (I); (II) y (III) se tiene:

$2(a + b + c) = 66$

$a + b + c = 33$

Finalmente: $MA(a; b; c) = \dfrac{33}{3} = 11$

6 La media aritmética de 50 números es 90. Si quitamos 5 de ellos, el promedio aumenta a 96, ¿cuál es la media aritmética de los números eliminados?

Resolución:

Sean los 50 números: $a_1; a_2; a_3; ... ; a_{50}$

Por dato del problema:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50}}{50} = 90$$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50} = 4500$

Quitamos 5 de ellos:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}{45} = 96$$

$4500 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 4320$

$180 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

Finalmente:

$$MA(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5) = \frac{180}{5} = 36$$

7 Si la MH de a y 4 es 6, la MH de 8 y b es 12, calcula la MH de a y b.

Resolución:

$$MH(a; 4) = 6 \Rightarrow \frac{2(a)(4)}{a+4} = 6$$

$4a = 3a + 12$

$a = 12$

$$MH(8; b) = 12 \Rightarrow \frac{2(8)(b)}{8+b} = 12$$

$4b = 24 + 3b$

$b = 24$

$$MH(a; b) = \frac{2(a)(b)}{a+b} = \frac{2(12)(24)}{12+24} = \frac{2 . 12 . 24}{36}$$

$\therefore MH(a; b) = 16$

8 La MH de 3 números es 4 y la MH de otros 4 números es 3. Halla la MH de los 7 números.

Resolución:

Sean los 7 números: $a_1; a_2, a_3, ... ; a_7$

$$MH(a_1; a_2; a_3) = 4 \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{3}{4}$$

$$MH(a_4; a_5; a_6; a_7) = 3 \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} = \frac{4}{3}$$

$MH(a_1; a_2; a_3; ...; a_7)$

$$= \frac{7}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7}}$$

$$= \frac{7}{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{7}{\frac{25}{12}} = \frac{84}{25}$$

9 Para dos números a y b se cumple que:
$MA \times MH = 196 \wedge MA \times MG = 245$
Halla: (a + b)

Resolución:

$MA \times MH = 196$

$MG^2 = 196 \Rightarrow MG = 14$

$MA \times MG = 245$

$MA \times 14 = 245 \Rightarrow MA = \frac{35}{2}$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{35}{2}$$

$\therefore a + b = 35$

10 El promedio aritmético de las edades de 4 personas es 44 años, ninguno de ellos es menor de 36 años. ¿Cuál es la edad máxima que puede tener uno de ellos?

Resolución:

Sean las edades de las 4 personas: $a_1; a_2; a_3; a_4$

Por dato del problema: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = 44$

Sea a_1 = edad máxima: además $a_2 = a_3 = a_4 = 36$

Luego: $\frac{a_1 + 36 + 36 + 36}{4} = 44$

$a_1 + 108 = 176$

$a_1 = 68$

Actividades de razonamiento

1. La media aritmética de dos números es 5 y la media armónica de los mismos es 16/5. Halla los números.

A) 7 y 3 B) 8 y 2 C) 9 y 1
D) 6 y 4 E) 10 y 1

2. La media geométrica de dos números es 18 y su media armónica es 72/5. ¿Cuáles son los números?

A) 27 y 12 B) 35 y 10 C) 37 y 8
D) 36 y 9 E) 81 y 4

3. La media aritmética de 6 números pares consecutivos es 21. Calcula la media aritmética de los dos mayores.

A) 23 B) 22 C) 25 D) 24 E) 26

4. El promedio aritmético de 6 números pares consecutivos es 17, calcula el promedio aritmético de los 6 números pares consecutivos siguientes.

A) 29 B) 24 C) 25 D) 26,5 E) 28

5. El promedio de 12 números es 14; si a estos 12 números se le agrega el 19 y 23, entonces el nuevo promedio es:

A) 14 B) 16 C) 18 D) 15 E) 20

6. El promedio de 15 números es 18, si a estos 15 números se le agrega el 25 y 28, entonces el nuevo promedio es:

A) 20 B) 19 C) 18 D) 23 E) 25

7. En un salón de 20 alumnos la nota promedio es 14 en RM; en el mismo curso la nota promedio para un aula de 30 alumnos es 11. ¿Cuál será la nota promedio si se juntan los 50 alumnos?

A) 12 B) 12,4 C) 12,2 D) 13 E) 14

8. El promedio de 50 números es 60. Si se retiran 10 de ellos cuyo promedio es 40, ¿en cuánto varía el promedio?

A) Aumenta en 6 B) Aumenta en 5
C) Disminuye en 6 D) No varía
E) Disminuye en 5

9. Si la edad promedio de 4 personas es de 65 años y ninguno de ellos es mayor de 70 años, ¿cuál es la mínima edad que puede tener uno de ellos?

A) 60 B) 55 C)65 D) 50 E) 68

10. De 5 integrantes de un equipo de básquet, ninguno sobrepasa las 30 canastas por juego. ¿Cuál será la mínima cantidad que uno de ellos puede acertar para que el promedio sea de 26 canastas por juego?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

11. El promedio de 12 números es 15, si se quitan dos de ellos cuyo promedio es 25, ¿en cuánto disminuye el promedio?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

12. La suma de dos números es 100, su media armónica es 32. La media geométrica de ellos es:

A) 36 B) 38 C) 40 D) 45 E) 42

13. La edad promedio de 4 personas es 34 años y al incluir en el grupo una quinta persona, el promedio disminuye en 4. ¿Cuál es la edad de la quinta persona?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 14 E) 12

14. El promedio aritmético de 81 números consecutivos es 104. Halla la media geométrica entre el mayor y el menor.

A) 84 B) 108 C) 112 D) 102 E) 96

Claves

1. B 2. D 3. C 4. A 5. D 6. B 7. C 8. B 9. D 10. A 11. E 12. C 13. D 14. E

Reto



La edad promedio de h hombres es h años y ninguno de ellos tiene menos de (h/2) años. ¿Cuál es la máxima edad que puede tener uno de ellos?

Rpta.: $\frac{h(h+1)}{2}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. La media aritmética de tres números es 30, si el menor es la mitad del mayor y el intermedio es la media aritmética de los otros dos; entonces el mayor de dichos números, es:

A) 38 B) 40 C) 35 D) 37 E) 30

2. La media aritmética de los x primeros números naturales es 15. Halla la media aritmética de los 10 siguientes.

A) 32 B) 28,5 C) 30 D) 25 E) 34,5

3. El promedio aritmético de (0,2)x y (0,3)x es 0,01. Halla x.

A) 0,2 B) 0,02 C) 0,4 D) 0,04 E) 0,01

4. El promedio de 2 números pares consecutivos es 17, calcula el promedio de los dos números pares consecutivos siguientes.

A) 21 B) 24 C) 26 D) 16 E) 18

5. El promedio de 3 números impares consecutivos es 15, calcula el promedio de los tres números impares consecutivos siguientes.

A) 19 B) 28 C) 15 D) 21 E) 27

6. El promedio de 4 números es 36. Si la suma de los dos primeros es 40, ¿cuál es el promedio de los 2 números siguientes?

A) 15 B) 26 C) 22 D) 18 E) 52

7. Calcula el valor de x sabiendo que el promedio de los números 8; 9; 10; 11; 13; 14; x es 12.

A) 18 B) 19 C) 22 D) 20 E) 23

8. La media aritmética de dos números es 6. Si la relación de dichos números es de 1 a 2, halla el mayor de ellos.

A) 8 B) 6 C) 14 D) 12 E) 7

9. Si el promedio de 5 números consecutivos es 20, calcula el promedio de los 3 números consecutivos siguientes.

A) 23 B) 25 C) 24
D) 26 E) 22

10. El promedio de los siguientes números es:

$$\underbrace{10; 10; \ldots; 10}_{20 \text{ veces}}; \underbrace{30; 30; 30; \ldots; 30}_{40 \text{ veces}}$$

A) 24 B) 23, 3 C) 22
D) 19, 3 E) 25, 6

NIVEL 2

11. Dos números están en la relación de 16 a 9. ¿En qué relación estarán su media aritmética y su media geométrica?

A) 25/24 B) 19/17 C) 16/15
D) 19/18 E) 23/21

12. Si la media geométrica de a y 12 es 6, halla a.

A) 2 B) 7 C) 5 D) 6 E) 3

13. Si: P = MA de 6 y 2
Q = MA de 4 y 12
Calcula la MG de P y Q.

A) $\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 2 E) $3\sqrt{2}$

14. Si: A = MA de 100 y 35
B = MA de 10 y 5
Calcula la MG de A y B.

A) 22 B) 27,5 C) 24,5
D) 22,5 E) 23

15. Si: M = MA de 4 y 8
N = MA de 7 y 1
Calcula la MH de M y N.

A) 4, 6 B) 4 C) 4, 8 D) 4, 2 E) 5

16. El promedio de 20 números es 25. Si se le agrega un número más el promedio sigue siendo 25, ¿cuál es el nuevo número?

A) 25 B) 26 C) 24 D) 23 E) 27

17. La media aritmética de 40 números es 80. Si quitamos 5 de ellos aumenta a 84, ¿cuál es la media aritmética de los números eliminados?

A) 54 B) 49 C) 52 D) 48 E) 51

18. La MA de 3 números es k; si aumentamos un cuarto número, la MA será k + 1. ¿Cuál es este cuarto número?

A) 2k B) 2k – 1 C) k + 7
D) k + 4 E) k – 2

19. Si:
A = MG de 12 y 48
B = MG de 20 y 80
Calcula la MH de A y B.

A) 27 B) 25 C) 35 D) 20 E) 30

20. Halla el promedio:

$$\underbrace{a^2;\ a^2;\ a^2;\ \dots;\ a^2}_{\text{b veces}};\ \underbrace{b^2;\ b^2;\ b^2;\ \dots;\ b^2}_{\text{a veces}}$$

A) $2(a + b)$ B) $\dfrac{2 . a . b}{a + b}$ C) ab

D) $\dfrac{a . b}{(a + b)}$ E) $\dfrac{a . b}{a - b}$

NIVEL 3

21. Halla el mayor de dos números tales que su media aritmética sea 18,5 y su media geométrica sea 17,5.

A) 18 B) 49/2 C) 25/2 D) 40 E) 19

22. La MG de 2 números es 6 y la MG de otros 2 números es 4. Halla la MG de los 4 números.

A) $4\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{6}$

23. Si la MA de a y 18 es 21 y la MA de 22 y b es 23, calcula la MG de a y b.

A) 21 B) 20 C) 18
D) 24 E) 26

24. Si la MH de a y 4 es 6 y la MH de 8 y b es 12, calcula la MH de a y b.

A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 16

25. La siguiente tabla muestra la distribución de las edades de una clase. Halla la edad promedio.

Número de alumnos	5	2	6	8	4
Edades	12	13	14	11	15

A) 14,3 B) 14,5 C) 12,72 D) 13,6 E) 13,2

26. El promedio aritmético de 20 números es 35 y el promedio de otros 30 números es 60. Halla el promedio aritmético de los 50 números.

A) 45 B) 47 C) 52 D) 50 E) 48

27. Calcula la MH de dos números cuya MA es 20 y su MG es 10.

A) 5 B) 8 C) 10 D) 7 E) 3

28. Si el promedio aritmético de las edades de 4 hombres es 48 y ninguno de ellos es menor de 45 años, entonces la máxima edad que podría tener uno de ellos, es:

A) 50 B) 57 C) 55 C) 53 E) 60

29. Si la MA y la MH de dos números están en la misma relación que los números 25 y 9. Halla el mínimo valor que puede tomar la MG de dichos números, si son enteros.

A) 6 B) 3 C) 4 D) 5 E) 2

30. Para 2 números a y b se cumple que:

$MA \times MH = 196$

$MA \times MG = 245$

Halla $(a + b)$.

A) 35 B) 32 C) 40 D) 28 E) 30

Claves

NIVEL 1	9. C	17. C	25. C
1. B	10. B	18. D	26. D
2. E	NIVEL 2	19. E	27. A
3. D	11. A	20. C	28. B
4. A	12. E	NIVEL 3	29. B
5. D	13. B	21. B	30. A
6. E	14. D	22. C	
7. B	15. C	23. D	
8. A	16. A	24. E	

UNIDAD 2



¿Qué significan los números de nuestra tarjeta de crédito?

El número de nuestra tarjeta de crédito consta de 16 dígitos, como por ejemplo vemos en la tarjeta que aparece en la imagen de arriba. Estos dígitos están separados en grupos de 4 para poder identificarlo mejor, es decir, no es porque cada grupo signifique una cosa, sino que es una razón eminentemente práctica. Vamos a tomar como ejemplo el número de la imagen:

4275 3156 0372 5493

El significado de esos 16 números es el siguiente:

- Los cuatro primeros números (4275 en nuestro caso) son los números de identificación de la entidad que nos proporciona la tarjeta, que es diferente según la entidad a la que corresponde (hasta siendo de la misma entidad, dos tarjetas de distintos continentes pueden tener números distintos).
- El siguiente dígito, (3 en la nuestra) indica el tipo de tarjeta y la entidad financiera a la que corresponde (America Express, VISA...).
- Los diez dígitos posteriores (en nuestro ejemplo, 1560372549) son algo así como el número de identificación del usuario al que pertenece la tarjeta, que lo identifican de forma única.
- El dígito final (3 en la imagen) es un dígito de control.

Y en este último punto es donde entra las matemáticas. El dígito de control se calcula a partir de los dígitos anteriores y sirve para confirmar que el número de la tarjeta es un número válido.

Tengamos en cuenta que hay muchos lugares donde se pueden introducir números de tarjeta, por lo que es interesante que exista un algoritmo para desechar números de tarjetas falsas.

El algoritmo que se utiliza para calcular el dígito de control de una tarjeta se denomina algoritmo de Luhn, y se debe al informático alemán Hans Peter Luhn.

Matemática recreativa

¿Qué peluquero elegir?

Carlos iba de camino a Costa del Sol, a pasar unas vacaciones, cuando al atravesar un pueblo se le averió el coche. Mientras se lo arreglaban, decidió hacerse cortar el pelo.

El pueblo solo tenía dos peluquerías, la de Pepe y la de Tony. Carlos echó una ojeada por la peluquería de Pepe. El espectáculo no fue de su agrado. Pensó "¡Vaya suciedad! Hay que limpiar el espejo, el suelo está lleno de pelo, el barbero sin afeitar, y lleva un corte de pelo horrible".

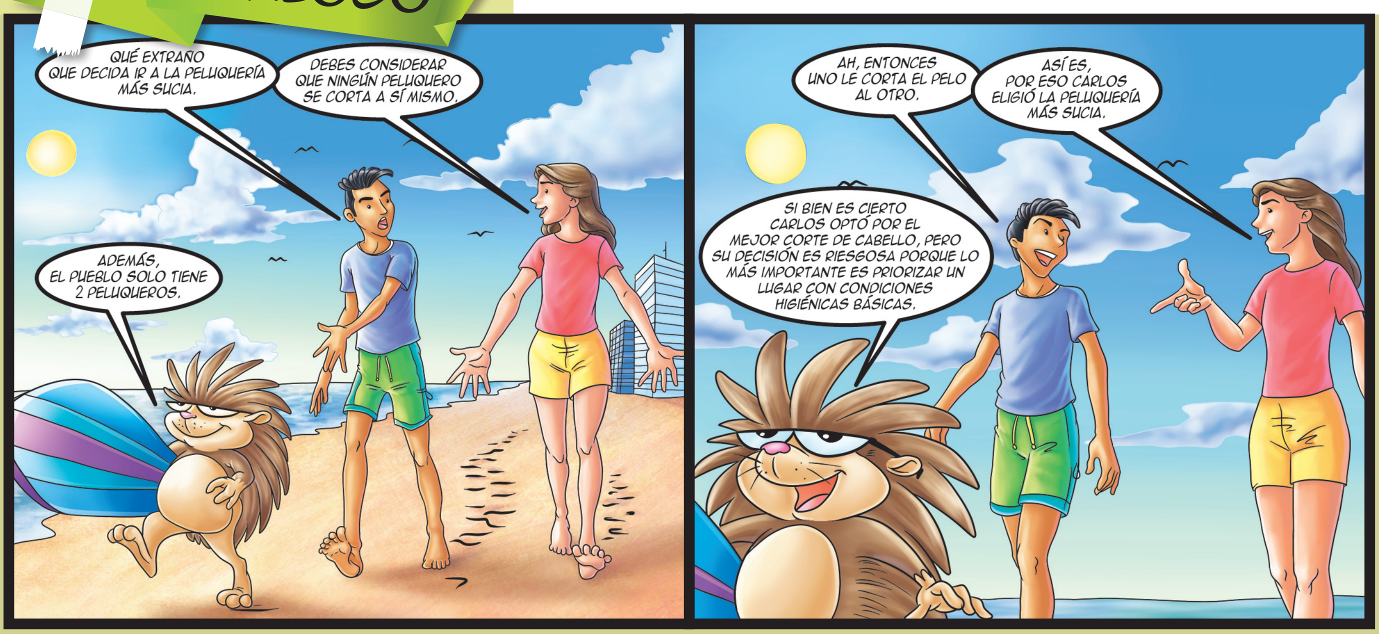
No es de extrañar que Carlos se marchara de allí, y fuera a dar un vistazo a la peluquería de Tony. Carlos miró a través del escaparate. Al verla pensó: "¡Qué diferencia! El espejo está limpio, el suelo bien barrido y Tony lleva un corte de pelo perfecto".

Pero Carlos no entró a la peluquería de Tony. Regresó en cambio a la otra peluquería, pese a lo sucia que estaba, para que le cortaran el pelo allí.

¿A qué obedece su conducta?



DIÁLOGO



Operadores matemáticos

OPERACIÓN MATEMÁTICA

Es aquel procedimiento que transforma una o más cantidades en otra cantidad llamada resultado, bajo ciertas reglas y/o condiciones establecidas.

Ejemplo:

Operador

$7 + 9 = 16$

Resultado

Atención

Los símbolos que se indican (+, –, ×, ÷, etc.) son la base para crear nuevas operaciones de diferentes reglas o leyes de formación.



OPERADOR MATEMÁTICO

Es aquel símbolo que representa a una operación matemática.

Operación matemática	Operador matemático
Adición	$+$
Sustracción	$-$
Multiplicación	$\times$
División	$\div$
Radicación	$\sqrt{\ }$
Logaritmación	log

Operadores no convencionales

Los operadores no convencionales pueden ser cualquier símbolo incluso figuras geométricas.

*	Operador asterisco
#	Operador grilla
△	Operador triángulo
▽	Operador nabla
□	Operador cuadrado
▭	Operador rectángulo
○	Operador círculo

Importante

Como se puede ver, una vez relacionados los valores de las variables, estos se reemplazan en la ley de formación, teniendo en cuenta también si es que hay un dato auxiliar.



Ejemplo:

Si $a \triangle b = 3a + 5b$, halla: $7 \triangle 6$

Resolución:

Operador triángulo

$a \triangle b = \underbrace{3a + 5b}$

Ley de formación

1.er elemento — 2.° elemento

Piden: $7 \triangle 6 = 3(7) + 5(6) = 21 + 30 = 51$

Problemas resueltos

1 Si: $\textcircled{x} = 2x^2 \quad \wedge \quad \underset{a}{\triangle} = a + 2$

Halla: $\underset{\textcircled{4}}{\triangle}$

Resolución:

$\textcircled{4} = 2(4)^2$
$= 2(16)$
$= 32$

Luego:

$\underset{\textcircled{4}}{\triangle} = \underset{32}{\triangle} = 32 + 2$

$\underset{\textcircled{4}}{\triangle} = 34$

2 Si: a % b = 2a – b
Halla x en: x % 10 = 10 % 2

Resolución:

Del enunciado:
x % 10 = 10 % 2
2x – 10 = 2(10) – 2
2x – 10 = 20 – 2
2x = 28
x = 14

3 Se define: A θ B = 5A – 7B
Halla m en: (2 θ m) θ (3 θ 2) = 8

Resolución:

2 θ m = 5(2) – 7m = 10 – 7m
3 θ 2 = 5(3) – 7(2) = 15 – 14 = 1
Reemplazando:
(10 – 7m) θ 1 = 8
5(10 – 7m) – 7(1) = 8
5(10 – 7m) – 7 = 8
5(10 – 7m) = 15
(10 – 7m) = 3
7 = 7m
m = 1

4 Si: $P \leftrightarrow Q = \frac{6}{P} + \frac{4}{Q} + 2$
Halla x en: $x \leftrightarrow 2 = 2 \leftrightarrow 4$

Resolución:

Del enunciado:
$x \leftrightarrow 2 = 2 \leftrightarrow 4$

$\frac{6}{x} + \frac{4}{2} + 2 = \frac{6}{2} + \frac{4}{4} + 2$

$\frac{6}{x} + 2 = 3 + 1$

$\frac{6}{x} = 2$

$x = 3$

5 Si: a * b = 4a – 5b
a % b = 7a – 3b
Halla: E = (3 * 2) % (4 * 3)

Resolución:

(3 * 2) = 4(3) – 5(2) = 12 – 10 = 2
(4 * 3) = 4(4) – 5(3) = 16 – 15 = 1
Reemplazando:
E = (3 * 2) % (4 * 3)
E = 2 % 1
E = 7(2) – 3(1)
E = 14 – 3 ⇒ E = 11

6 Si: $x^2 @ y^3 = x^3 - y^2$
Halla: P = 16 @ 125

Resolución:

P = 16 @ 125
$P = 4^2 @ 5^3$
$P = 4^3 - 5^2$
P = 64 – 25
P = 39

7 Si: $a \triangle b = \frac{a+b}{a-b}$
Halla el valor de n en: $2 \triangle n = 6 \triangle 3$

Resolución:

$2 \triangle n = 6 \triangle 3$

$\frac{2+n}{2-n} = \frac{6+3}{6-3}$

$\frac{2+n}{2-n} = \frac{9}{3}$

$\frac{2+n}{2-n} = 3$

2 + n = 6 – 3n
4n = 4
n = 1

8 Si: $a \square b = a + ab - b$
Halla el valor de x en: $\sqrt{x \square 5} = 7$

Resolución:

$\sqrt{x \square 5} = 7$

$\sqrt{x + 5x - 5} = 7$

$\sqrt{6x - 5} = 7$

6x – 5 = 49
6x = 54
x = 9

9 Sabiendo que: $\boxed{\frac{a}{b}} = 4a - 3b$

Resuelve la ecuación: $\boxed{\frac{2x+1}{x+3}} = \boxed{\frac{3}{4}}$

Resolución:

$\boxed{\frac{2x+1}{x+3}} = \boxed{\frac{3}{4}}$

4(2x + 1) – 3(x + 3) = 4(3) – 3(4)
8x + 4 – 3x – 9 = 0 ⇒ 5x = 5   ∴ x = 1

Actividades de razonamiento

1. Si: $m \boxslash n = 5m - 2n$

Calcula:

$$S = \frac{(4 \boxslash 8) \boxslash (3 \boxslash 7)}{1 \boxslash 1}$$

A) 11 B) 8 C) 6 D) 12 E) 10

2. Sabemos que: $\boxed{a} = 5 . a - 2$

Calcula:

$$S = \sqrt{\boxed{\boxed{2}} - 2}$$

A) 4 B) 5 C) 8 D) 6 E) 7

3. Si: $a \# b = \dfrac{a - b}{a}$

Calcula: $\left(\dfrac{1}{2} \# \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4} \# \dfrac{1}{5}\right)$

A) 1/3 B) 3/10 C) 1/5 D) 3/5 E) 1/15

4. Si: $\boxed{x} = x^3 - x^2$

Halla: $\sqrt{\boxed{3} - 2}$

A) 4 B) 5 C) 3 D) 8 E) 16

5. Se define:

$\boxed{a}\textcircled{b} = a^2 - 5b$

Resuelve: $\boxed{\boxed{4}\textcircled{2}}\ \textcircled{\boxed{3}\textcircled{1}}$

A) 18 B) 10 C) 11 D) 16 E) 14

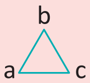
6. Se definen:

$$\begin{cases} \boxed{x} = 2x + 3 \\ \textcircled{x} = 3x - 2 \end{cases}$$

Calcula: $E = \boxed{3} + \textcircled{3} + \boxed{6} + \textcircled{6}$

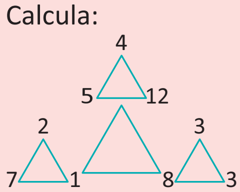
A) 47 B) 43 C) 50 D) 40 E) 48

7. Se define:



$= b^3 - a . c$

Calcula:



A) 59 B) 57 C) 55 D) 61 E) 63

8. Se define:

$\boxed{a \mid b} = a^2 - 2b$

Halla: $\boxed{\boxed{4 \mid 5} \mid \boxed{7 \mid 20}}$

A) 22 B) 18 C) 25 D) 24 E) 20

9. Sabemos que:

(a | b) = 8a – 6b

Halla x en:

(x + 6 | x + 5) = 100

A) 41 B) 16 C) 45 D) 38 E) 31

10. Se define:

$\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline\end{array}$ sobre $\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline\end{array}$ = 2 . a – 5 . b

Halla x en: $\begin{array}{|c|}\hline x-1 \\ \hline\end{array}$ sobre $\begin{array}{|c|}\hline 3x+2 \\ \hline\end{array}$ = 60

A) 63 B) 48 C) 19 D) 51 E) 50

11. Si: $a \oplus b = 3.a - b$

Halla x en: $(x \oplus 13) \oplus 2 = 31$

A) 11 B) 4 C) 9 D) 10 E) 8

12. Si: $a \text{ ø } b = 2a + b^2$

Halla x en: $5 \text{ ø } x = 19$

A) 5 B) 3 C) 7 D) 4 E) 6

13. Si: $a \,\alpha\, b = \frac{a - b}{a + b}$

Halla x en: $x \,\alpha\, 5 = 9 \,\alpha\, 4$

A) 15/8 B) 49/4 C) 45/4 D) 17 E) 37/5

14. Dado: $a \text{ ø } b = a^2 - b^2$

Halla x en: $x \text{ ø } 2 = 21$

A) 5 B) 2 C) 1 D) 4 E) 3

Claves

1. C	5. D	9. A	13. C
2. D	6. A	10. D	14. A
3. E	7. D	11. E	
4. A	8. B	12. B	

Reto



(n) = 3n + 1

([m]) = 6m + 3

Calcula el valor de:

((–2) – [(–1)] + [3])

Rpta.: 16

Refuerza practicando

NIVEL 1

1) Si: (triángulo con a arriba; b y c abajo) $= 2a + b - c$

Halla: (triángulo con 5 arriba; 7 y 3 abajo)

A) 26 B) 21 C) 18 D) 14 E) 12

2) Si: (triángulo con b arriba, a a la izquierda y c a la derecha) $= a + b + c - 4$

Halla: (triángulo con −2 arriba, 12 a la izquierda y 13 a la derecha)

A) 18 B) 20 C) 19 D) 21 E) 26

3) Si: $m \# n = n^2 + 2n$

Halla: $24 \# 3$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 14 E) 8

4) Se define: $a \triangle b = \dfrac{a - b}{3}$

Calcula: $(18 \triangle 3) + (8 \triangle 5)$

A) 3 B) 7 C) 5 D) 4 E) 6

5) Si: $a \# b = a^2 + 3b + 1$

Halla: $4 \# 2$

A) 22 B) 24 C) 25 D) 23 E) 26

6) Se define: $P \# Q = P + Q - 2$

Halla: $M = (3 \# 4) + (8 \# 2)$

A) 15 B) 12 C) 10 D) 40 E) 13

7) Se define: (recuadro con a y b arriba; c abajo) $= a^2 + b^2 - c^2$

Halla: (recuadro con 5 y 3 arriba; 2 abajo)

A) 28 B) 26 C) 31 D) 32 E) 30

8) Se define: (círculo con m arriba; n y p abajo) $= m^3 - n^2 - p$

Calcula: (círculo con 4 arriba; 5 y 6 abajo)

A) 32 B) 33 C) 31 D) 40 E) 28

9) Se define: (círculo con m arriba, a a la izquierda, b a la derecha y n abajo) $= \dfrac{a \times b}{m + n}$

Calcula: (círculo con 8 arriba, 5 a la izquierda, 12 a la derecha y 7 abajo)

A) 3 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

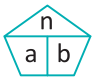
10) Se define: $a \# b = \dfrac{a + b}{2}$

Halla: $E = (16 \# 4) + (5 \# 3)$

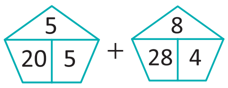
A) 11 B) 9 C) 14 D) 16 E) 19

11. Si: $a \triangle b = \dfrac{a+b}{a-b}$. Halla: $M = (5 \triangle 4) + (4 \triangle 3)$

A) 18 B) 15 C) 11 D) 21 E) 16

12. Se define: 

$= \dfrac{a-b}{n}$

Calcula: 

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

NIVEL 2

13. Si: $a \oplus b = 15a - 3b$
Hallar: $E = (8 \oplus 20) + (4 \oplus 10)$

A) 80 B) 50 C) 70 D) 60 E) 90

14. Se define: $a \triangle b = 5a - 7b$
Calcula: $S = (2 \triangle 1) \triangle (3 \triangle 2)$

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 7

15. Si: $a \% b = a^2 - 2b$
Halla: $R = (4 \% 5) \% (7 \% 20)$

A) 16 B) 17 C) 18 D) 20 E) 26

16. Si: $a \ominus b = 3a - b$
Halla: $(8 \ominus 13) \ominus 2$

A) 31 B) 29 C) 32 D) 36 E) 37

17. Si: $m \# n = m^2 - 5n$
Calcula: $A = (4 \# 2) \# (3 \# 1)$

A) 29 B) 26 C) 20 D) 16 E) 18

18. Se define: $x \triangle y = 5x - 2y$
Calcula: $S = (4 \triangle 8) \triangle (3 \triangle 7)$

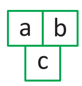
A) 16 B) 20 C) 28 D) 18 E) 26

19. Si: 

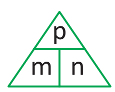
$= 3x - 5$

Halla: 

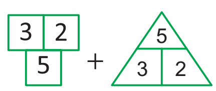
A) 2 B) 4 C) 3 D) 9 E) 1

20. Si: 

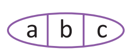
$= a \,.\, b + c$



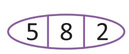
$= (m - n) \,.\, p$

Calcula: E = 

A) 13 B) 8 C) 9 D) 10 E) 16

21. Si: 

$= \sqrt{\dfrac{2a+3b}{c} - 1}$

Halla: 

A) 3 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

22. Se define: $m \# n = m^2 - 3n$

Calcula: $S = \sqrt[3]{(6 \# 10) + 2}$

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 5

23. Se define: $m \# n = \sqrt{m + 3n + 11}$

Halla: $8 \# 2$

A) 5 B) 4 C) 7 D) 8 E) 9

24. Se define: $A \boxtimes B = \sqrt{A^2 + B^2 + 6}$

Halla: $3 \boxtimes 1$

A) 3 B) 2 C) 6 D) 4 E) 5

25. Se define: $m \, \Delta \, n \, \square \, q = \dfrac{m + q}{n}$

Halla: $(8 \, \Delta \, 3 \, \square \, 10)$

A) 5 B) 6 C) 4 D) 9 E) 12

NIVEL 3

26. Se define: $\text{(a)} = a^2 + 1$

Halla: $S = \sqrt{((2)) - (3)}$

A) 3 B) 1 C) 4 D) 8 E) 9

27. Se define: $\boxed{x} = 2x + 1$

$\triangle x = 2x - 1$

Calcula: $\boxed{\triangle 3}$

A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 8

28. Se define: $\text{(x)} = x^2 - 2$

$\triangle x = 2x + 3$

Calcula: $\triangle \text{(3)}$

A) 17 B) 16 C) 19 D) 21 E) 23

29. Si: $\text{(x)} = x^2 + x + 1$

$\boxed{x} = x^2 + x - 2$

Calcula: $E = \text{(2)} + \boxed{3}$

A) 18 B) 19 C) 17 D) 20 E) 21

30. Se define: $/\overline{a}/ = \dfrac{a^2 + 1}{2}$

$\text{(b)} = \dfrac{b^2 - 1}{3}$

Calcula: $M = /\overline{3}/ + \text{(5)}$

A) 11 B) 14 C) 16 D) 12 E) 13

31. Si: $\text{(x)} = 2x + 3$

$\boxed{x} = 3x - 2$

Calcula: $\sqrt[3]{(\boxed{4}) + 4}$

A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) 1

32. Se define: $a \alpha b = 5a - 7b$
Halla x en: $(x \alpha 1) \alpha (3 \alpha 2) = 8$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

33. Si: $a \Delta b = 12a + 2b$
Halla x.
$(1 + x) \Delta (1 - 4x) = 40$

A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{15}{2}$ C) $\frac{17}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{13}{2}$

34. Si: $\begin{cases} x \square y = \frac{x+y}{2} \\ x \Delta y = \frac{x-y}{2} \end{cases}$

Calcula: $M = (10 \square 4) - (6 \Delta 2)$

A) 4 B) 7 C) 8 D) 5 E) 1

35. Si: $a \Delta b = a + b$
$a \ominus b = a - b$
Halla x en: $(x \Delta 4) + (5 \ominus 4) = 15 \ominus 6$

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 4

36. Se define: $m \alpha n = 3m - 2n$
Halla x en: $x \alpha 4 = 10 \alpha 6$

A) $\frac{14}{3}$ B) $\frac{26}{3}$ C) 2 D) 1 E) 5

37. S: $a \# b = 2a + 5b$
Halla x en: $x \# 2 = 1 \# 8$

A) 14 B) 13 C) 16 D) 18 E) 19

38. Se define: $P \nabla A = P \times A + P + A$
Halla x.
$2 \nabla x = 32$

A) 10 B) 8 C) 9 D) 11 E) 16

39. Si: $\triangle_{a} = 2a$ (a dentro del triángulo)
Calcula: $[\triangle_{3} - 3]^{\triangle_{2}}$

A) 25 B) 64 C) 72 D) 81 E) 64

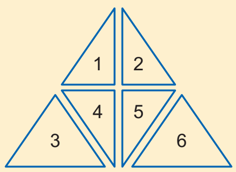
Claves

NIVEL 1	11. E	21. C	31. D
1. D	12. B	22. C	32. C
2. C	**NIVEL 2**	23. A	33. E
3. A	13. E	24. D	34. D
4. E	14. A	25. B	35. E
5. D	15. C	**NIVEL 3**	36. B
6. E	16. A	26. C	37. C
7. E	17. D	27. B	38. A
8. B	18. D	28. A	39. D
9. C	19. B	29. C	
10. C	20. E	30. E	

Conteo de figuras

Recuerda

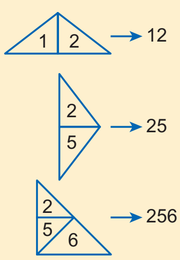
Triángulos simples son aquellos que se presentan de forma individual.





Atención

Triángulos formados por dos o más figuras.

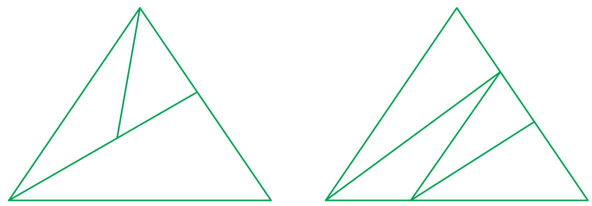




En este capítulo contaremos la mayor cantidad posible de figuras geométricas (triángulos, cuadriláteros, hexágonos, etc.) que hay en una determinada figura.
Así se cuenta:

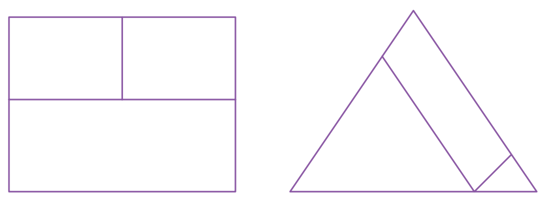
Cuando la figura es sencilla (no es complicada) el proceso de contar se puede realizar mentalmente, veamos algunos ejemplos:

- Calcula el total de triángulos en cada una de las siguientes figuras:



Total = 5 triángulos   Total = 7 triángulos

- Calcula el total de cuadriláteros en cada una de las siguientes figuras:



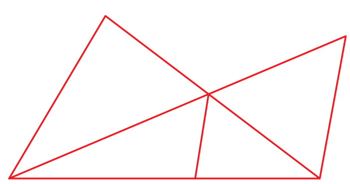
Total = 5 cuadriláteros   Total = 3 cuadriláteros

Cuando la figura ya no es sencilla (es algo complicada) se recomienda escribir una letra o número en cada espacio encerrado por figuras simples y luego se procede a contar en forma ordenada, de la siguiente manera:

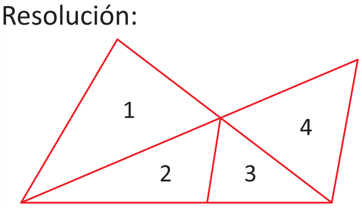
- Se cuenta todas las figuras simples, o sea, las que tienen una sola letra o número.
- Se cuentan las figuras formadas por 2 letras o números, luego las formadas por 3 letras y así sucesivamente hasta que al final se suman todos los resultados parciales, obteniendo el total de figuras.

CONTEO DE TRIÁNGULOS

Ejemplo:
¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



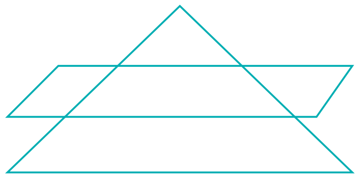
Resolución:



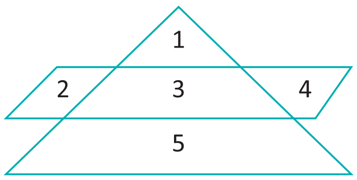
Con 1 número:	1, 2, 3, 4	4
Con 2 números:	23	1
Con 3 números:	123, 234	2
		7 triángulos

CONTEO DE CUADRILÁTEROS

Ejemplo:
Halla el número total de cuadriláteros.



Resolución:



Con 1 número: 2, 3, 4, 5 = 4
Con 2 números: 23, 34, 35 = 3
Con 3 números: 234 = 1

8 cuadriláteros



Importante

En lo sucesivo, si respecto a una cantidad de figuras no se forma la figura que estamos buscando, no lo consideramos.

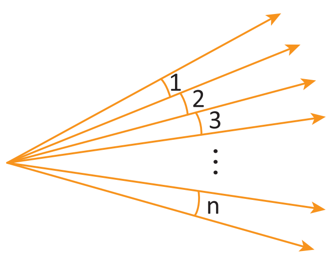
CONTEO DE FIGURAS POR FÓRMULA

Número de segmentos



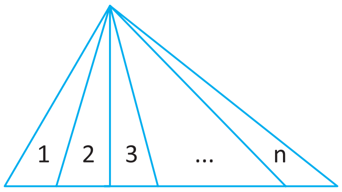
$$\text{Número de segmentos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de ángulos



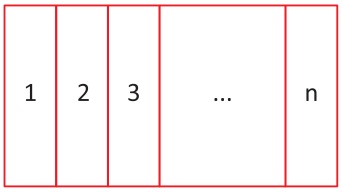
$$\text{Números de ángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Números de triángulos



$$\text{Números de triángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de cuadriláteros

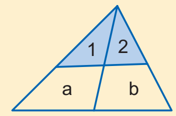


$$\text{Número de cuadriláteros} = \frac{n(n+1)}{2}$$



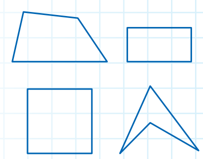
Recuerda

Cuando las figuras al interior de otra figura, no son las que debemos contar, a estos se les asignan letras; así:
Si deseamos contar triángulos:



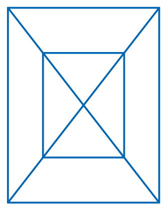
Nota

Cuadrilátero: figura geométrica de cuatro lados.
Ejemplos:



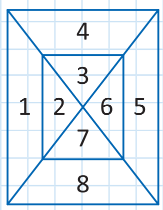
Problemas resueltos

1 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución:

Asignamos números a cada región.



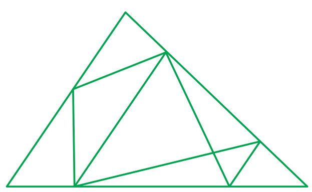
Con 1 número: 2, 3, 6, 7 — 4Δs

Con 2 números: 12, 34, 56, 78, 23, 67, 27, 36 — 8Δs

Con 4 números: 1234, 5678, 1278, 3456 — 4Δs

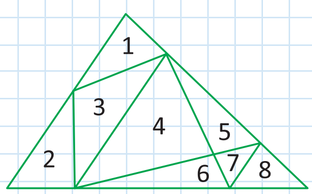
Total: 16Δs

2 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución:

Asignamos números a cada región.



Con 1 número: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 — 8Δs

Con 2 números: 45, 67, 46, 57 — 4Δs

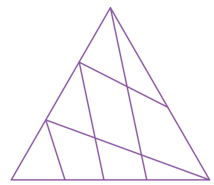
Con 3 números: 678, 578 — 2Δs

Con 5 números: 45678 — 1Δ

Con 8 números: 12345678 — 1Δ

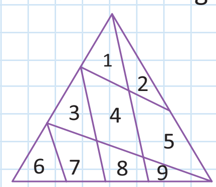
Total: 16Δs

3 Decir cuantos cuadriláteros hay en la siguiente figura:



Resolución:

Asignamos números a cada región.



Con 1 número: 4, 5, 7, 8 — 4

Con 2 números: 37, 14, 48, 59, 34, 45, 67, 78 — 8

Con 3 números: 345, 678, 148 — 3

Con 4 números: 1245, 4589 — 2

Con 5 números: 34678 — 1

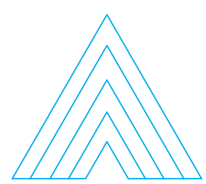
Con 6 números: 124589 — 1

Con 7 números: 3456789 — 1

Con 8 números: 12345789 — 1

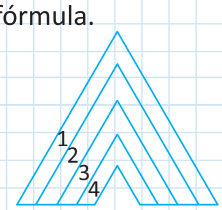
Número total de cuadriláteros $= 4 + 8 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 21$

4 ¿Cuántos hexágonos hay en la siguiente figura?



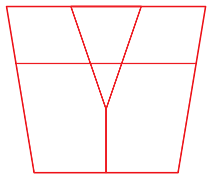
Resolución:

Asignando números a cada región simple y aplicando la fórmula.



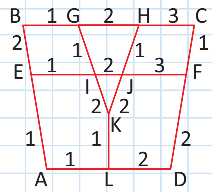
Números de hexágonos $= \dfrac{4(5)}{2} = 10$

5 ¿Cuántos segmentos hay en la figura?



Resolución:

Asignamos a cada punto una letra y a cada segmento simple un número.



Número de segmentos BC $= \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos EF $= \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos AD $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos AB $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos CD $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

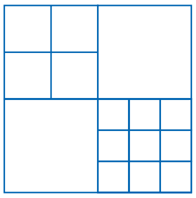
Número de segmentos GK $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos HK $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos KL $= 1$

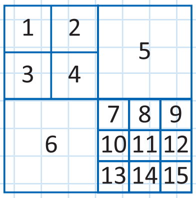
$\therefore$ Número total de segmentos $= 6 + 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 28$

6 ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



Resolución:

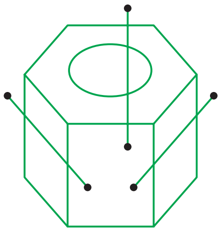
Asignamos un número a cada región.



Con 1 número:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	15
Con 4 números:	1234, 781011, 891112, 10111314, 11121415	5
Con 9 números:	789101112131415	1
Con 15 números:		1

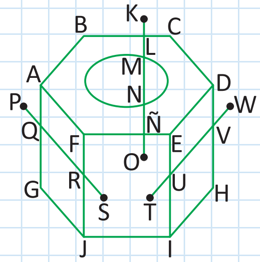
$\therefore$ Número total de cuadrados $= 15 + 5 + 1 + 1 = 22$

7 ¿Cuántos segmentos hay en total en la figura plana mostrada?



Resolución:

Asignamos a cada punto una letra y a cada segmento simple un número.



Número de segmentos KO $= \dfrac{5(6)}{2} = 15$

Número de segmentos PS $= \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos TW $= \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos BC $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos FE $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos AG $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos FJ $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

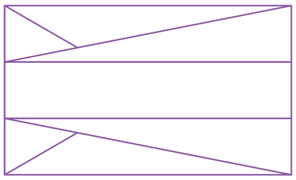
Número de segmentos EI $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos DH $= \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos simples $= \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AF}, \overline{DE}, \overline{GJ}, \overline{JI}, \overline{HI} : 7$

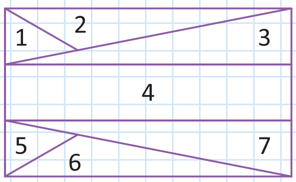
$\therefore$ Número total de segmentos $= 15 + 2(6) + 6(3) + 7 = 52$

8 De acuerdo a la figura mostrada:
T: número de triángulos
G: número de cuadriláteros
Calcula: T + C



Resolución:

Asignamos números a cada región.



Contando triángulos

Con 1 número: 1, 2, 3, 5, 6, 7 — 6△s

Con 2 números: 12, 56 — 2△s

Luego: T = 6 + 2 = 8

Contando cuadriláteros

Con 1 número: 4 — 1△

Con 2 números: 34, 47 — 2△s

Con 3 números: 123, 347, 567 — 3△s

Con 4 números: 1234, 4567 — 2△s

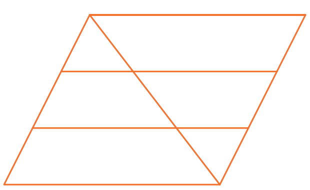
Con 5 números: 12347, 34567 — 2△s

Con 7 números: 1234567 — 1△

Luego: C = 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 11

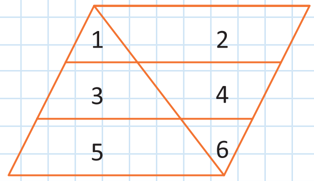
$\therefore$ T + C = 8 + 11 = 19

9 ¿Decir cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



Resolución:

Asignamos números a cada región.



Con 1 número: 2, 3, 4, 5 — 4

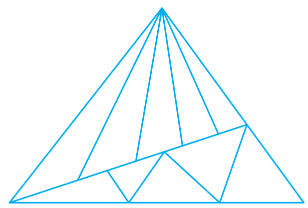
Con 2 números: 12, 34, 56, 35, 24 — 5

Con 4 números: 1234, 3456 — 2

Con 6 números: 123456 — 1

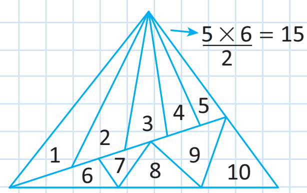
$\therefore$ Número total de cuadriláteros $= 4 + 5 + 2 + 1 = 12$

10 De acuerdo a la figura mostrada:
T: número de triángulos
C: número de cuadriláteros
Calcula: T + C



Resolución:

Calculando por partes:



Calculando triángulos:

Con 1 número: 6, 7, 8, 9, 10 — 5

Con 2 números: 67 — 1

Con 3 números: 678 — 1

Con 4 números: 6789 — 1

Con 5 números: 678910 — 1

Además el total también forma 1 triángulo

Luego: T = 15 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 25

Calculando cuadriláteros:

Con 2 números: 78, 89, 910 — 3

Con 3 números: 789, 8910 — 2

Con 4 números: 78910 — 1

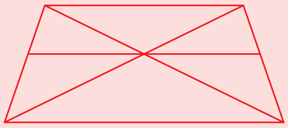
Además, 123456789 forma otro cuadrilátero.

Luego: C = 3 + 2 + 1 + 1 = 7

$\therefore$ "T + C" = 25 + 7 = 32

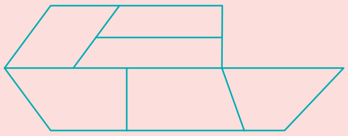
Actividades de razonamiento

1. Halla el número de triángulos en la siguiente figura:



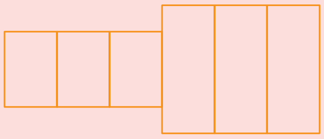
A) 11 B) 8 C) 6 D) 12 E) 10

2. Halla el número de cuadriláteros en la siguiente figura:



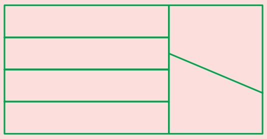
A) 9 B) 11 C) 7 D) 5 E) 6

3. ¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura?



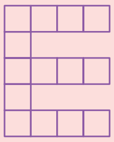
A) 38 B) 36 C) 32 D) 34 E) 30

4. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



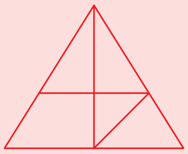
A) 14 B) 15 C) 13 D) 18 E) 16

5. El número de cuadriláteros que existen en la figura adjunta es:



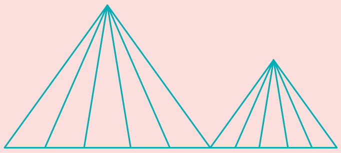
A) 30 B) 40 C) 35 D) 37 E) 42

6. Halla el número de triángulos en la siguiente figura:



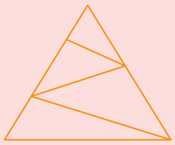
A) 6 B) 9 C) 2 D) 7 E) 8

7. Halla el número de triángulos en la siguiente figura.



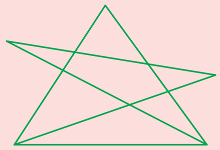
A) 35 B) 20 C) 30 D) 25 E) 45

8. ¿Cuántos segmentos hay en total en la figura?



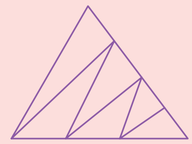
A) 12 B) 10 C) 9 D) 13 E) 11

9. Halla el número de triángulos en la siguiente figura:



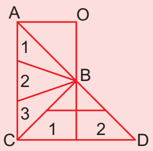
A) 14 B) 10 C) 11 D) 15 E) 12

10. Decir cuantos cuadriláteros hay en la siguiente figura:



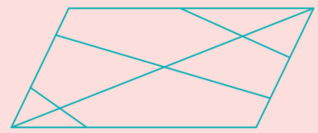
A) 9 B) 7 C) 10 D) 12 E) 8

11. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



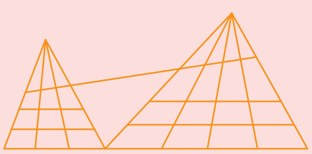
A) 12 B) 11 C) 13 D) 14 E) 10

12. De la siguiente figura mostrada "T" representa el número total de triángulos y "P" el número de pentágonos. Halla: T + P



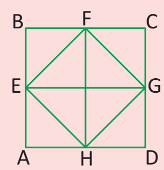
A) 14 B) 16 C) 18 D) 10 E) 12

13. Decir cuantos triángulos hay en la siguiente figura:



A) 45 B) 55 C) 60 D) 75 E) 65

14. En la figura mostrada ABCD es un cuadrado, siendo E, F, G, H, puntos medios. Halla la diferencia entre el número total de triángulos y cuadrados.



A) 12 B) 6 C) 7 D) 18 E) 8

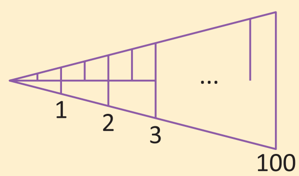
Claves

1. D	5. E	9. A	13. E
2. B	6. B	10. C	14. B
3. B	7. C	11. D	
4. A	8. D	12. B	

Reto

¿Cuántos triángulos en total se pueden contar?



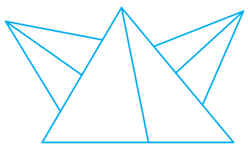


Rpta.: 400

Refuerza practicando

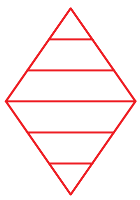
NIVEL 1

1. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



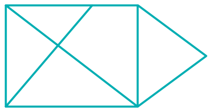
A) 6
B) 8
C) 9
D) 7
E) 10

2. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



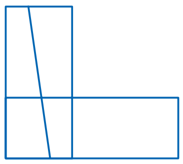
A) 4
B) 10
C) 5
D) 6
E) 8

3. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



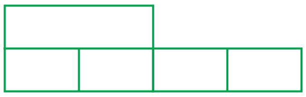
A) 8
B) 7
C) 5
D) 4
E) 6

4. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



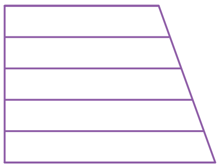
A) 12
B) 13
C) 9
D) 11
E) 10

5. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



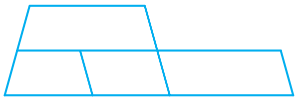
A) 11
B) 13
C) 14
D) 12
E) 10

6. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



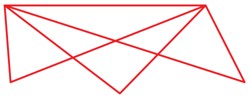
A) 13
B) 12
C) 14
D) 16
E) 15

7. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



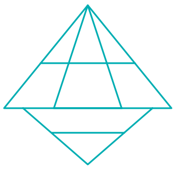
A) 7
B) 8
C) 12
D) 6
E) 10

8. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



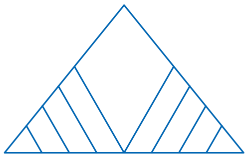
A) 10
B) 12
C) 13
D) 15
E) 14

9. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 12
B) 10
C) 15
D) 14
E) 13

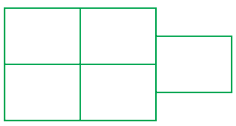
10. ¿Cuántos cuadriláteros existen en la figura?



A) 16
B) 14
C) 21
D) 12
E) 13

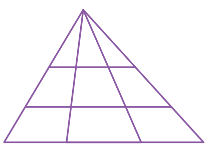
NIVEL 2

11. ¿Cuántos cuadriláteros hay?



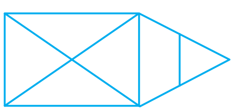
A) 10
B) 8
C) 9
D) 12
E) 6

12. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



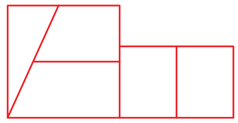
A) 18
B) 17
C) 16
D) 15
E) 20

13. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



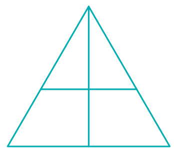
A) 8
B) 7
C) 9
D) 10
E) 6

14. ¿Cuántos cuadriláteros hay?



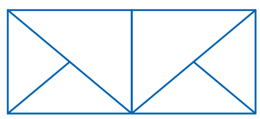
A) 6
B) 8
C) 10
D) 7
E) 9

15. Halla la suma del número de cuadriláteros y número de triángulos.



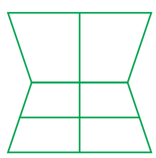
A) 7
B) 9
C) 10
D) 8
E) 11

16. Halla el total de triángulos que hay en la siguiente figura.



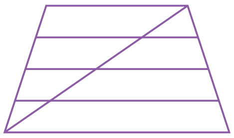
A) 7
B) 9
C) 10
D) 8
E) 11

17. Halla el número de cuadriláteros en la siguiente figura.



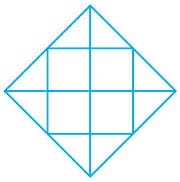
A) 9
B) 10
C) 12
D) 8
E) 11

18. Halla el número de cuadriláteros en la siguiente figura.



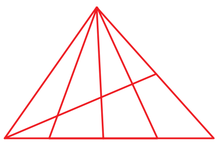
A) 23
B) 24
C) 22
D) 21
E) 20

19. ¿Cuántos triángulos existen en la siguiente figura?



A) 21
B) 19
C) 22
D) 20
E) 18

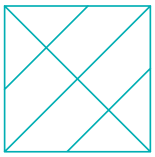
20. ¿Cuántos triángulos existen en el siguiente gráfico?



A) 24
B) 22
C) 26
D)20
E) 18

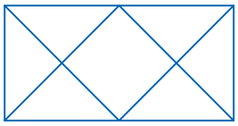
NIVEL 3

21. ¿Cuántos triángulos existen en el gráfico siguiente?



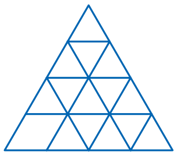
A) 11
B) 12
C) 13
D) 15
E) 14

22. ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadriláteros hay en esta figura?



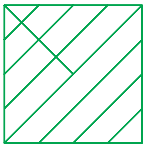
A) 9; 10
B) 12; 12
C) 10; 12
D) 12; 10
E) 11; 12

23. ¿Cuántos triángulos hay?



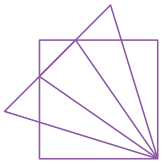
A) 25
B) 20
C) 30
D) 24
E) 22

24. Halla el número de triángulos en:



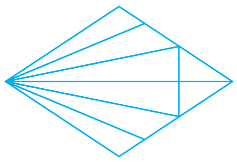
A) 20
B) 19
C) 17
D) 18
E) 16

25. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 13
B) 15
C) 16
D) 12
E) 10

26. Decir cuántos triángulos hay en la siguiente figura.



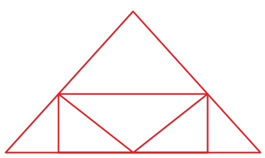
A) 15
B) 12
C) 18
D) 20
E) 16

27. De acuerdo a la siguiente figura mostrada:

T = número de triángulos

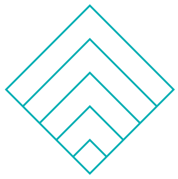
C = número de cuadriláteros

Calcula T + C



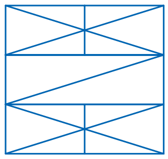
A) 16
B) 20
C) 22
D) 18
E) 21

28. ¿Cuántos hexágonos hay en la siguiente figura?



A) 8
B) 10
C) 12
D) 6
E) 14

29. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



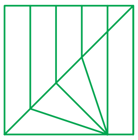
A) 26
B) 30
C) 25
D) 28
E) 24

30. De acuerdo a la figura mostrada:

T = número de triángulos;

C = número de cuadriláteros

Calcula T + C



A) 30
B) 35
C) 34
D) 36
E) 32

Claves

NIVEL 1

1. C
2. D
3. B
4. A
5. D
6. E
7. B
8. E
9. D
10. C

NIVEL 2

11. A
12. A
13. D
14. D
15. B
16. B
17. C
18. C
19. D
20. A

NIVEL 3

21. E
22. B
23. A
24. E
25. B
26. C
27. C
28. B
29. D
30. D

Fracciones

DEFINICIÓN

Es la división indicada de dos números enteros positivos de la forma $\frac{a}{b}$, con la condición de que al efectuar dicha división se obtenga siempre un número decimal.

Es decir: $f = \frac{a}{b} \rightarrow$ número decimal

Donde:

a: numerador

b: denominador

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACCIÓN

Ejemplos:

- $\frac{4}{5}$ → 4: Número de partes que se toma. 5: Número total de partes.

Total $<>$ Unidad

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$4 \text{ partes} <> \frac{4}{5}$

$5 \text{ partes} <> \frac{5}{5} <> 1$

- $\frac{9}{12}$ → 9: Número de partes que se toma. 12: Número total de partes.

Total $<>$ Unidad

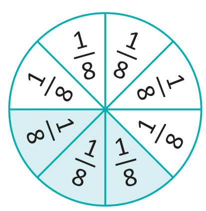
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$9 \text{ partes} <> \frac{9}{12}$

$12 \text{ partes} <> \frac{12}{12} <> 1$

- $\frac{3}{8}$ → 3: Número de partes que se toma. 8: Número total de partes.

Total $<>$ Unidad



$3 \text{ partes} <> \frac{3}{8}$

$8 \text{ partes} <> \frac{8}{8} <> 1$

Observación

¿Cuáles de las siguientes expresiones representan a una fracción?

$\frac{3}{8}; \frac{-2}{5}; \frac{0}{7}; \frac{1}{9}; \frac{7}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}$

- Son fracciones: $\frac{3}{8}; \frac{1}{9}; \frac{7}{2}$



Recuerda

Todas las fracciones ya sean propias o impropias se pueden representar gráficamente.



Atención

Las fracciones impropias se pueden expresar de la siguiente manera:

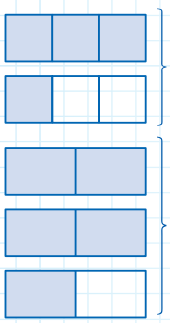
$\frac{35}{13} = \underbrace{2\frac{9}{13}}_{\text{n.° mixto}} = 2 + \frac{9}{13}$

$\frac{27}{5} = \underbrace{5\frac{2}{5}}_{\text{n.° mixto}} = 5 + \frac{2}{5}$



Nota

Fracción mixta



$1\frac{1}{3} <> \frac{4}{3}$

$2\frac{1}{2} <> \frac{5}{2}$

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Propias

Cuando el numerador es menor que el denominador.

Ejemplos:

$\frac{5}{7}; \frac{3}{16}; \frac{2}{3}; \frac{27}{100}$

Impropias

Cuando el numerador es mayor que el denominador.

Ejemplos:

$\frac{9}{2}; \frac{15}{7}; \frac{18}{12}; \frac{50}{40}$

Ordinarias o comunes

Cuando su denominador es diferente de una potencia de 10.

Ejemplos:

$\frac{2}{7}; \frac{12}{15}; \frac{30}{50}; \frac{12}{9}$

Decimales

Cuando su denominador es igual a una potencia de 10.

Ejemplos:

$\frac{3}{100}; \frac{17}{10}; \frac{15}{1000}$

Homogéneas

Dos o más fracciones se dice que son homogéneas cuando todos poseen el mismo denominador.

Ejemplos:

$\frac{2}{5}; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}$

Heterogéneas

Dos o más fracciones se dice que son heterogéneas cuando todas no poseen el mismo denominador.

Ejemplos:

$\frac{2}{5}; \frac{7}{6}; \frac{9}{11}; \frac{13}{6}$

Reductibles

Cuando su numerador y denominador poseen divisores comunes.

Ejemplos:

$\frac{2}{4}; \frac{3}{9}; \frac{25}{15}$

Irreductibles

Cuando su numerador y denominador no poseen divisores comunes.

Ejemplos:

$\frac{5}{11}; \frac{11}{9}; \frac{17}{6}$

FRACCIÓN GENERATRIZ

Al efectuar la división en una fracción se obtiene siempre un número decimal que puede ser exacto o inexacto.

$\frac{a}{b}$ = Número decimal
- Exacto
- Inexacto
  - Periódico puro
  - Periódico mixto

Decimal exacto

Para convertir un decimal exacto a fracción, se escribe en el numerador el número sin la coma decimal y se escribe en el denominador la cifra 1 seguida de tantas cifras cero como cifras tenga la parte decimal.

- $0,\overbrace{6}^{\text{1 cifra decimal}} = \frac{6}{\underbrace{10}_{\text{1 "cero"}}}$
- $1,\overbrace{253}^{\text{3 cifras decimales}} = \frac{1253}{\underbrace{1000}_{\text{3 "ceros"}}}$
- $5,\overbrace{04}^{\text{2 cifras decimales}} = \frac{504}{\underbrace{100}_{\text{2 "ceros"}}}$
- $3,\overbrace{0531}^{\text{4 cifras decimales}} = \frac{30531}{\underbrace{10000}_{\text{4 "ceros"}}}$

Decimal periódico puro

Para convertir un decimal periódico puro a fracción, se escribe en el numerador el periodo y en el denominador tantas cifras 9 como cifras tenga la parte periódica.

- $0,\overbrace{\overset{\frown}{3}}^{\text{1 cifra periódica}} = \frac{3}{\underbrace{9}_{\text{1 "nueve"}}}$
- $0,\overbrace{\overset{\frown}{012}}^{\text{3 cifras periódicas}} = \frac{12}{\underbrace{999}_{\text{3 "nueves"}}}$
- $0,\overbrace{\overset{\frown}{15}}^{\text{2 cifras periódicas}} = \frac{15}{\underbrace{99}_{\text{2 "nueves"}}}$
- $0,\overbrace{\overset{\frown}{3529}}^{\text{4 cifras periódicas}} = \frac{3529}{\underbrace{9999}_{\text{4 "nueves"}}}$

Decimal periódico mixto

Para convertir un decimal periódico mixto, se escribe en el numerador toda la parte decimal y se le resta la parte decimal no periódica, y en el denominador se escribe tantas cifras 9 como cifras tenga la parte periódica seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

- $0,1\overset{\frown}{6} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$
- $5,2\overset{\frown}{9} = 5 + 0,2\overset{\frown}{9} = 5 + \frac{29-2}{90}$
- $0,2\overset{\frown}{13} = \frac{213-2}{990} = \frac{211}{990}$
- $3,12\overset{\frown}{53} = 3 + 0,12\overset{\frown}{53} = 3 + \frac{1253-12}{9900}$

Recuerda

$\underbrace{0,ab \ldots m}_{\text{n cifras}} = \frac{ab \ldots m}{\underbrace{100 \ldots 0}_{\text{n cifras}}}$



Atención

$\underbrace{0,\overset{\frown}{ab \ldots m}}_{\text{n cifras}} = \frac{ab \ldots m}{\underbrace{99 \ldots 9}_{\text{n cifras}}}$



Recuerda

$0,ab\overset{\frown}{cde} = \frac{abcde - ab}{99\,900}$



Problemas resueltos

1 Calcula M si:

$$M = \left[\sqrt{(3+2\frac{1}{6})(3-2\frac{1}{6}).\frac{1}{155}} + \frac{5}{6}\right]^{15}$$

Resolución:

$$M = \left[\sqrt{(3+2\frac{1}{6})(3-2\frac{1}{6}).\frac{1}{155}} + \frac{5}{6}\right]^{15}$$

$$M = \left[\sqrt{(3+\frac{13}{6}).(3-\frac{13}{6}).\frac{1}{155}} + \frac{5}{6}\right]^{15}$$

Aplicando diferencia de cuadrados en el paréntesis.

$$M = \left[\sqrt{(9-\frac{169}{36})\frac{1}{155}} + \frac{5}{6}\right]^{15}$$

$$M = \left[\sqrt{(\frac{155}{36})\frac{1}{155}} + \frac{5}{6}\right]^{15}$$

$$M = \left[\sqrt{\frac{1}{36}} + \frac{5}{6}\right]^{15} = \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right]^{15} = 1^{15}$$

$\therefore M = 1$

2 ¿Cuánto le falta a la suma de A y B para ser igual a $\frac{4}{3}$?

Si: $A = 1 - \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}$; $B = 2 - \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3}}$

Resolución:

Sea "x" la cantidad que le falta a la suma de A y B para ser igual a $\frac{4}{3}$.

Entonces a, "A + B" se le debe agregar x para ser igual a $\frac{4}{3}$.

$$A = 1 - \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}} = 1 - \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3}$$

Entonces: $A = \frac{1}{3}$

Además: $B = 2 - \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3}} = 2 - \cfrac{1}{\cfrac{2}{3}} = 2 - \frac{3}{2}$

Entonces: $B = \frac{1}{2}$

Luego: $A + B + x = \frac{4}{3}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + x = \frac{4}{3}$$

$$\frac{5}{6} + x = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

3 ¿Cuánto le falta al valor de:

$A = \cfrac{1-\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{3}}{1+\cfrac{1}{2}-\cfrac{1}{3}}$; para ser igual a la unidad?

Resolución:

$$A = \cfrac{1-\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{3}}{1+\cfrac{1}{2}-\cfrac{1}{3}}; \text{ MCM } (1; 2; 3) = 6$$

$$A = \cfrac{\cfrac{6-3+2}{6}}{\cfrac{6+3-2}{6}} = \cfrac{\cfrac{5}{6}}{\cfrac{7}{6}} \Rightarrow A = \frac{5}{7}$$

Sea "x" la cantidad que le falta a A para ser igual a la unidad.

Luego: $\frac{5}{7} + x = 1$

$$\therefore x = \frac{2}{7}$$

4 Fabiana gasta su dinero de la siguiente manera; en un par de zapatos gasta los 3/4 de su dinero; en un pantalón gasta 1/7 de lo que le queda y en un reloj gasta 2/3 del nuevo resto, quedándole al final S/.20. ¿Cuánto tenía inicialmente Fabiana?

Resolución:

Sea "D" la cantidad de dinero.
Según el enunciado:

Zapatos:

gasta: $\frac{3}{4}D$ queda: $\frac{1}{4}D$

Pantalón:

gasta: $\frac{1}{7}(\frac{1}{4}D)$ queda: $\frac{6}{7}(\frac{1}{4}D)$

Reloj:

gasta: $\frac{2}{3}(\frac{6}{7}(\frac{1}{4}D))$ queda: $\frac{1}{3}(\frac{6}{7}(\frac{1}{4}D))$

Del dato: $\frac{1}{3}(\frac{6}{7}(\frac{1}{4}D)) = 20$

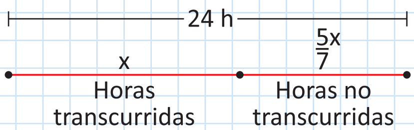
D = S/.280

5 ¿Qué hora es cuando la parte no transcurrida del dia es igua a los 5/7 de la parte transcurrida del día?

Resolución:

Sea "x" las horas transcurridas.

Entonces las horas no transcurridas será $\frac{5}{7}$x.



Del gráfico: $x + \frac{5}{7}x = 24$

$$\frac{12x}{7} = 24 \Rightarrow x = 14 \text{ h}$$

∴ Son las 2:00 p.m.

6 Una palta pesa 2/3 de kg menos 2/3 de su peso. ¿Cuánto pesa la palta en kg?

Resolución:

Sea "x" kg el peso de la palta según enunciado.

$$x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$$

$$5x = 2$$

$$\therefore\ x = 0{,}4 \text{ kg}$$

7 ¿Cuál es la fracción cuyo valor es mayor que 1/8, pero menor que 5/32 si se sabe que su denominador es 64?

Resolución:

Sea $f = \frac{N}{64}$ la fracción.

Según enunciado:

$$\frac{1}{8} < \frac{N}{64} < \frac{5}{32}$$

Homogenizamos denominadores:

$$\frac{1}{8} < \frac{N}{64} < \frac{5}{32} \Rightarrow \frac{8}{64} < \frac{N}{64} < \frac{10}{64}$$

Luego: N = 9

$$\therefore f = \frac{9}{64}$$

8 ¿Qué parte de $5\frac{1}{3}$ es lo que le falta a 1/9 para ser igual a los 2/3 de 1/2?

Resolución:

Sea "x" lo que le falta a 1/9 para ser igual a los 2/3 de 1/2:

Entonces: $\frac{1}{9} + x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{9} + x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

Veamos ahora qué parte de $5\frac{1}{3}$ es $\frac{2}{9}$.

$$\frac{\frac{2}{9}}{5\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{16}{3}} = \frac{1}{24}$$

9 Calcula el valor de: $E = \dfrac{1 - 0,\widehat{1} + 0,\widehat{2}}{1 + 0,\widehat{1} - 0,\widehat{2}} + \dfrac{3}{4}$

Resolución:

$$E = \frac{1 - 0,\widehat{1} + 0,\widehat{2}}{1 + 0,\widehat{1} - 0,\widehat{2}} + \frac{3}{4}$$

$$E = \frac{1 - \frac{1}{9} + \frac{2}{9}}{1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{9}} + \frac{3}{4}$$

$$E = \frac{\frac{9 - 1 + 2}{9}}{\frac{9 + 1 - 2}{9}} + \frac{3}{4}$$

$$E = \frac{10}{8} + \frac{3}{4}$$

$$\therefore E = 2$$

10 Calcula el valor de: "A – B "

$$A = \frac{1,1\widehat{6}}{0,2\widehat{3}}; \quad B = \frac{0,1\widehat{2} + 0,1\widehat{3}}{0,1\widehat{4} + 0,1\widehat{5}}$$

Resolución:

Calculamos "A":

$$A = \frac{\frac{116 - 11}{90}}{\frac{23 - 2}{90}} = \frac{105}{21} \Rightarrow A = 5$$

Calculamos "B":

$$B = \frac{\frac{12 - 1}{90} + \frac{13 - 1}{90}}{\frac{14 - 1}{90} + \frac{15 - 1}{90}} = \frac{\frac{11}{90} + \frac{12}{90}}{\frac{13}{90} + \frac{14}{90}} = \frac{\frac{23}{90}}{\frac{27}{90}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{23}{27}$$

$$\therefore A - B = 5 - \frac{23}{27} = \frac{112}{27}$$

Actividades de razonamiento

1. Efectúa:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{6}}}$$

A) 13/5 B) 7/11 C) 5/11 D) 1/8 E) 1/6

2. Un depósito contiene 150 litros de agua. Se consume $\frac{2}{5}$ de su contenido, luego se consume $\frac{1}{2}$, ¿cuántos litros de agua quedan?

A) 60 ℓ B) 75 ℓ C) 120 ℓ D) 15 ℓ E) 30 ℓ

3. ¿Cuál es el número cuya mitad, más su duplo, más su tercera parte y más su triple da el número 1435?

A) 246 B) 300 C) 450 D) 358 E) 248

4. ¿Qué número debe sumarse a los términos de la fracción 12/9 para que la suma de sus términos sea 47?

A) 9 B) 10 C) 13 D) 12 E) 14

5. En una conferencia hay 27 reporteros, 36 contadores y 9 ingenieros. ¿Qué fracción del total son reporteros?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{1}{4}$

6. Josué realiza gastos en dos días. El sábado gastó 1/6 de lo que tenía y el domingo gastó la cuarta parte de lo que le quedaba. ¿Qué parte del total inicial le queda?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{6}{7}$

7. Una señora va al mercado con S/.34 y gasta la tercera parte de los dos quintos de lo que no gastó. ¿Cuánto gastó?

A) S/.25 B) S/.24 C) S/.30 D) S/.40 E) S/.4

8. En un examen un alumno resuelve los $\frac{3}{5}$ de lo que no resuelve. ¿Qué parte del examen ha resuelto?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{7}$

9. ¿Qué parte de los $\frac{5}{21}$ de los $\frac{7}{9}$ de 63 es los $\frac{6}{13}$ de los $\frac{5}{8}$ de 52?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{9}{7}$

10. ¿Cuál es el número que disminuido en 7 unidades da un resultado igual al que se obtiene multiplicándolo por $\frac{3}{10}$?

A) 10 B) 15 C) 12 D) 8 E) 11

11. ¿Qué parte de $3\frac{1}{3}$ es lo que le falta a $\frac{1}{9}$ para ser igual a los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$?

A) $\frac{13}{150}$ B) $\frac{3}{130}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{6}{7}$

12. ¿Cuántos octavos de $\frac{4}{7}$ hay que restarle a $\frac{5}{12}$ para obtener $\frac{5}{21}$?

A) 8,3 B) 3,8 C) 2,4 D) 5,2 E) 2,5

13. Si a los $\frac{5}{11}$ de un número se le suma los $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{2}$ del mismo número, se obtiene los $\frac{27}{22}$ de los $\frac{3}{8}$de 1484. Halla el número.

A) 140 B) 147 C) 567 D) 160 E) 157

14. Una persona inicialmente toma 16 metros de una cuerda. Luego toma los $\frac{2}{3}$ del resto y observa que las dos tienen la misma longitud. Halla la longitud de la cuerda.

A) 30 m B) 40 m C) 60 m D) 50 m E) 20 m

Claves

1. C	5. A	9. E	13. C
2. D	6. D	10. A	14. B
3. A	7. E	11. A	
4. C	8. D	12. E	

Reto



El intervalo $[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}]$ se divide en 5 pares iguales y x se encuentra en el punto medio del tercer intervalo. Si x es una fracción irreductible, halla la suma de sus términos.

Rpta.: 13

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Efectúa:

$$R = \frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} \times \left(1+\frac{2}{7}\right)$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 6 E) 1

2. Calcula:

$$P = \frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}$$

A) 1 B) 3 C) 1/4 D) 3/4 E) 4

3. Si el largo de un rectángulo disminuye en un quinto y el ancho aumenta en su mitad, ¿qué parte es el área inicial respecto de la final?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{11}{7}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{5}{6}$

4. Carol cada vez que entra a una tienda gasta $\frac{1}{4}$ de lo que no gasta. Si entró a 3 tiendas en forma consecutiva y se quedó con S/.64, ¿cuánto tenía antes de ingresar a la primera tienda?

A) S/.95 B) S/.140 C) S/.80 D) S/.125 E) S/.75

5. Un jugador en su primer juego pierde 1/3 de su dinero, en el segundo pierde 1/4 del resto y en el tercero pierde 1/5 del nuevo resto. Si al final se quedó con S/.200, ¿con cuánto empezó a jugar?

A) S/.500 B) S/.970 C) S/.800
D) S/.480 E) S/.600

6. ¿Cuántos valores puede tomar x sabiendo que 64/x es una fracción propia e irreductible mayor que 4/15?

A) 97 B) 88 C) 79 D) 93 E) 83

7. En una reunión de 80 personas los tres quintos menos 2 personas son varones. ¿Qué fracción representa la diferencia entre varones y mujeres respecto del total?



A) $\frac{7}{23}$ B) $\frac{23}{40}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{20}$ E) $\frac{17}{40}$

8. ¿Qué parte de 1/9 de 14/13 de 5/8 es 7/5 de 3/4 de 6/13 de 5/18 de 1/12?

A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{18}{5}$ D) $\frac{9}{62}$ E) $\frac{13}{20}$

9. Una carreta pesa 11 kg más los 6/11 de su peso total. ¿Cuánto pesa la carreta?

A) 13,8 kg B) 24,2 kg C) 9,38 kg
D) 19,3 kg E) 17,2 kg

10. La tercera parte del valor de A es igual a los 5/7 menos del valor de B. ¿Qué fracción representa el valor de B respecto del valor de A?

A) $\frac{10}{21}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{13}{17}$ D) $\frac{14}{3}$ E) $\frac{9}{14}$

NIVEL 2

11. Efectuá:

$$M = \frac{1}{1+\frac{2}{3+\frac{4}{5}}} \div \frac{1}{29}$$

A) 19 B) 16 C) 20 D) 18 E) 2

12. Carmen perdió $\frac{3}{8}$ del dinero que le encargaron, ¿qué parte de lo que queda servirá para reponer lo perdido?

A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{8}{11}$ C) $\frac{8}{23}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{11}{27}$

13. Los 3/4 de un nuevo muro están pintados de azul, los 3/5 del resto de blanco y lo que queda que mide 10 m de rojo. ¿Cuál es la longitud del muro?

A) 80 m B) 30 m C) 20 m
D) 100 m E) 120 m

14. De mi dinero gasté 1/3 en helados y 4/10 en chocolates. ¿Qué fracción de lo que tenía he gastado?

A) $\frac{4}{30}$ B) $\frac{23}{30}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{22}{15}$ E) $\frac{12}{15}$

15. Los 3/5 de 2/9 del triple de A es igual a los 2/15 de A^2. Halla el valor de A.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 5 D) 3 E) 10

16. De un recipiente que está lleno, se vacía $\frac{1}{8}$ de lo que no se vacía. ¿Qué parte del volumen inicial quedará con líquido?

A) $\frac{13}{18}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{8}{9}$

17. Si gaste 3/5 de lo que no gasté, luego perdí 2/3 de lo que no perdí, enseguida regalé 4/5 de lo que no regalé. ¿Qué parte del total regalé?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{12}{23}$

18. Un hombre puede hacer una obra en 12 días, si le ayudan 2 mujeres acabarían en 8 días. Si trabajan sólo las dos mujeres durante 6 días, ¿qué parte de la obra harían?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

19. Si A y B hacen una obra en 4 días; B y C en 6 días, A y C en 12 días. ¿En qué tiempo harían la obra los 3 juntos?

A) 12 días B) 9 días C) 10 días
D) 4 días E) 7 días

20. Si A y B pueden hacer una obra en 20 días. Trabajan juntos durante 12 días y se retira A, terminando B el resto en 12 días. ¿En qué tiempo A hace toda esa obra?

A) 48 días B) 32 días C) 60 días
D) 82 días E) 56 días

NIVEL 3

21. Se tienen 2 recipientes, uno con 4 litros de vino y 6 litros de agua el otro con 8 litros de vino y 4 litros de agua, se extraen simultáneamente 2 litros de la mezcla de cada uno de ellos para luego intercambiarse dichas cantidades extraídas. ¿Qué cantidad de vino queda en cada recipiente luego de ello?

A) $\frac{136}{29}\ \ell, \frac{112}{30}\ \ell$ B) $\frac{37}{18}\ \ell, \frac{93}{18}\ \ell$
C) $\frac{71}{15}\ \ell, \frac{29}{15}\ \ell$ D) $\frac{63}{29}\ \ell, \frac{109}{30}\ \ell$
E) $\frac{68}{15}\ \ell, \frac{112}{15}\ \ell$

22. En una reunión Juan come la mitad del número de pasteles más medio pastel; en la segunda vez, la mitad de los que quedaban más medio pastel, así sucesivamente, después de la cuarta vez que comió no quedo ningún pastel. ¿Cuántos pasteles tenía inicialmente?

A) 8 B) 10 C) 15 D) 17 E) 23

23. Un depósito de agua esta lleno hasta su mitad. Si se extrae 80 litros, el nivel del líquido disminuye hasta su sexta parte. ¿Cuál es el volumen total del deposito?

A) 180 ℓ B) 124 ℓ C) 166 ℓ D) 192 ℓ E) 170 ℓ

24. De una fiesta social se sabe que 3/4 eran mujeres 3/7 de los hombres eran casados y 1/3 de ellos tenían hijos. La mitad de las mujeres eran solteras, de las casadas se sabe que 3/5 eran rubias y 1/5 de estas representan en cantidad 189. Calcula el doble del número de hombres con hijos.

A) 120 B) 300 C) 189 D) 210 E) 500

25. Un mantel pierde al ser lavado 1/20 de su longitud; y 1/16 de su ancho. Averigua cuántos metros de esta tela deben comprarse para obtener después del lavado 136,8 m^2. El ancho primitivo del manto es 6/5 de metros.

A) 100 m B) 150 m C) 170 m
D) 146 m E) 128 m

26. A un tanque se conectó 2 caños, uno en el fondo y el otro a media altura. Si el primero puede vaciar el tanque en 9 horas y el otro en ese mismo tiempo puede vaciar el contenido sobre él. ¿En cuantas horas quedará vacío dicho tanque si se abren los 2 caños simultáneamente, estando el tanque lleno?

A) 6,75 h B) 7,5 h C) 4,35 h
D) 8,31 h E) 6,45 h

27. Un estanque puede ser llenado por las llaves A y B en 70 minutos por las llaves A y C en 84 minutos y por las llaves B y C en 140 minutos, ¿cuál de las 3 llaves mencionadas llenaría más rápido el estanque? Indica cuánto tiempo demoraría.

A) C, 105 min B) C, 420 min
C) A, 105 min D) B, 210 min
E) A, 163 min

28. En una apuesta Edith pierde $\frac{m}{n}$ partes del capital. Si aún le queda x soles, ¿cuánto tenía al empezar el negocio?

A) $\frac{x(m-1)}{1-n}$ B) $\frac{xn}{m}$ C) $\frac{xn}{1-m}$
D) $\frac{mx}{(1-n)}$ E) $\frac{nx}{n-m}$

29. Jorge y Luis pueden terminar juntos un trabajo en 10 días, Luis y Jaime lo harían en 12 días. Jorge y Jaime en 15 días. ¿Cuánto tiempo emplearían si trabajan los tres juntos?



A) 3 días B) 6 días C) 5 días
D) 8 días E) 4 días

30. Una pelota cae desde una altura de 243 m. Cada vez que toca el piso rebota $\frac{1}{3}$ de altura de donde cayó. ¿Qué altura se elevará la pelota en el cuarto rebote?

A) 18 m B) 8 m C) 15 m D) 3 m E) 11 m

Claves

NIVEL 1	10. B	18. C	26. B
1. E	NIVEL 2	19. D	27. C
2. C	11. A	20. C	28. E
3. E	12. D	NIVEL 3	29. D
4. D	13. D	21. E	30. D
5. A	14. C	22. C	
6. B	15. D	23. D	
7. D	16. E	24. B	
8. B	17. B	25. E	
9. B			

Tanto por ciento

CONCEPTO

Nos indica una relación entre una parte y la unidad que ha sido dividido en 100 partes iguales.

100 partes iguales

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

n partes

$$n\% = \frac{n}{100}$$

Ejemplos:

$50\% = \frac{50}{100}$ $\quad$ $40\% = \frac{40}{100}$ $\quad$ $60\% = \frac{60}{100}$

TANTO POR CIENTO DE UNA CANTIDAD

$$a\% \text{ de } b = \frac{a}{100} \times b$$

Ejemplos:

El 75% de 500 $= \frac{75}{100} \times 500 = 375$

El 24,5% de 40 $= \frac{24,5}{100} \times 40 = 9,8$

TANTO POR CIENTO DE TANTO POR CIENTO

Ejemplos:

1. Calcula el 60% del 40% de 500.

   Resolución:

   60% del 40% de 500

   $= \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} \times 500 = 6 \times 4 \times 5 = 120$

2. Calcula el 12,5% del 10% de 400.

   Resolución:

   12,5% del 10% de 400

   $= \frac{12,5}{100} \times \frac{10}{100} \times 400 = \frac{12,5}{10} \times 1 \times 4$

   $= \frac{50}{10} = 5$

RELACIÓN PARTE - TODO

Para representar en porcentaje una relación parte - todo, solo se debe multiplicar por 100%.

$$\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \times 100\%$$

Ejemplos:

¿Qué tanto por ciento de 80 es 20?

$\frac{20}{80} \times 100\% = 25\%$

¿Qué tanto por ciento es 39 de 13?

$\frac{39}{13} \times 100\% = 300\%$

Recuerda

Todo número expresado en porcentaje es el número sobre 100.

Ejemplos:

$70\% = \frac{70}{100}$

$30\% = \frac{70}{100}$

Nota

Toda cantidad representa para sí misma el 100%; es decir:

$a = 100\%a$

Atención

Sea M el número:

- 40%M + 22%M = 62%M
- 25%M − 10%M = 15%M
  M + 25%M = 125%M
  ↓
  100%M
- M – 48%M = 52%M
  ↓
  100%M

Nota

Pierdo o gasto	Queda
10%	90%
50%	50%
13%	87%
m%	(100 – m)%

Gano o agrego	Resulta
10%	110%
50%	150%
83%	183%
m%	(100 + m)%

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Descuentos sucesivos

Ejemplo:
¿A qué descuento único equivalen 2 descuentos sucesivos del 10% y 40%?

Resolución:

Descuento del 10% $\Rightarrow$ queda 90%

Descuento del 40% $\Rightarrow$ queda 60%

Luego:

$$90\% \times 60\% = \frac{90}{100} \times 60\% = 54\%$$

Finalmente:
Descuento único: 100% – 54% = 46%

Aumentos sucesivos

Ejemplo:
¿A qué aumento único equivalen 2 aumentos sucesivos del 20% y 40%?

Resolución:

Aumento del 20% $\Rightarrow$ se tiene 120%

Aumento del 40% $\Rightarrow$ se tiene 140%

Luego:

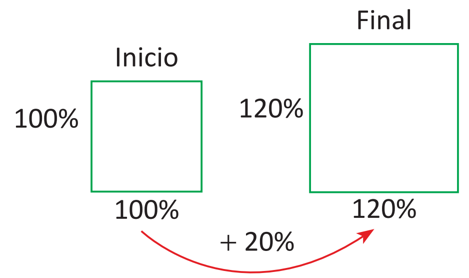
$$120\% \times 140\% = \frac{120}{100} \times 140\% = 168\%$$

Finalmente:
Aumento único: 168% – 100% = 68%

VARIACIÓN PORCENTUAL

Ejemplo:
Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

Resolución:



$$\begin{aligned} \ell_{inicio} &= 100\% \\ A_{inicio} &= (100\%)^2 \\ &= 100\% \times 100\% \\ &= 100\% \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ell_{final} &= 120\% \\ A_{final} &= (120\%)^2 \\ &= 120\% \times 120\% \\ &= 144\% \end{aligned}$$

+ 44%

$\therefore$ El área aumenta en: 144% – 100% = 44%

APLICACIONES COMERCIALES

Cuando en una transacción comercial obtenemos ganancia empleamos la siguiente fórmula:

$$Pv = Pc + G$$

Donde:
Pv: precio de venta
Pc: precio de costo
G: ganancia

Ejemplo:
Se vendió una cámara en S/.900 ganando el 20% del costo. ¿A cuánto compré la cámara?

Resolución:

Aplicamos: Pv = Pc + G
Pv = S/.900
Pc = ?
G = 20%Pc

Reemplazamos: Pv = Pc + 20%Pc
900 = 120% Pc
Pc = S/.750

Importante

Dos descuentos sucesivos del $D_1\%$ y $D_2\%$ se pueden reemplazar por un descuento único de:

$$D_u = \left(D_1 + D_2 - \frac{D_1 D_2}{100}\right)\%$$

Donde:
D_1: 1.er descuento
D_2: 2.° descuento
D_u: descuento único



Importante

Dos aumentos sucesivos del $A_1\%$ y $A_2\%$ se pueden reemplazar por un aumento único de:

$$A_u = \left(A_1 + A_2 + \frac{A_1 A_2}{100}\right)\%$$

Donde:
A_1: 1.er aumento
A_2: 2.° aumento
A_u: aumento único



Atención

Para los problemas de variación porcentual se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$V_p = \frac{\left(\text{aumento o disminución}\right)}{\left(\text{valor inicial}\right)} \times 100\%$$

El aumento o disminución se obtiene mediante la diferencia entre el valor final y el valor inicial.

Nota

Cuando existe pérdida:

$$Pv = Pc - P$$

Donde:
Pv: precio de venta
Pc: precio de costo
P: pérdida

Problemas resueltos

1 ¿De qué cantidad 4000 es el 8%?

Resolución:

Sea N dicha cantidad:

$$\frac{8}{100} \times N = 4000$$
$$N = 500 \times 100$$
$$N = 50\,000$$

2 El 12% del 32% de N es igual al 16% del 6% de 12 320. Halla N.

Resolución:

Del enunciado tenemos:

$$\frac{12}{100} \times \frac{32}{100} \times N = \frac{16}{100} \times \frac{6}{100} \times 12\,320$$
$$4N = 12\,320$$
$$N = 3080$$

3 ¿A qué descuento único equivalen 2 descuentos sucesivos del 30% y 50%?

Resolución:

Calculamos el descuento único:

$$D_u = \left(30 + 50 - \frac{30 \times 50}{100}\right)\%$$

$$D_u = (80 - 15)\%$$

$$D_u = 65\%$$

∴ Descuento único: 65%

4 ¿A qué aumento único equivalen 2 aumentos sucesivos del 40% y 60%?

Resolución:

Calculamos el aumento único:

$$Au = \left(40 + 60 + \frac{40 \times 60}{100}\right)\%$$

$$Au = (100 + 24)\%$$

$$Au = 124\%$$

∴ Aumento único: 124%

5 Si tuviera el 55% menos de la edad que tengo, tendría 27 años. ¿Cuántos años tengo?

Resolución:

Sea x la edad que tengo:

55% menos → tengo 45%

Por condición del problema:

$$\frac{45}{100}x = 27$$
$$x = 60$$

∴ Tengo 60 años.

6 Si el precio de un artículo, luego de haberle hecho dos descuentos sucesivos del 20% y 10% es de S/.14 400. ¿Cuál es el precio que tenía antes de dichos descuentos?

Resolución:

Sea x el precio del artículo.

Después de dos descuentos sucesivos del 20% y 10% queda:

$$\frac{80}{100} \times 90\% = 72\%$$

Luego: $\frac{72}{100}x = 14\,400$

$$x = S/.\ 20\,000$$

∴ El precio antes de los descuentos fue de S/.20 000.

7 Compré un televisor a S/. 460 y lo vendí perdiendo el 15% del precio de venta. ¿A cómo vendí el televisor?

Resolución:

Aplicando: Pv = Pc – P

Pv = ?

Pc = S/.460

P = 15% Pv

Reemplazando:

$$Pv = Pc - 15\%\,Pv$$
$$115\%\,Pv = 460$$
$$\frac{115}{100}\,Pv = S/.460$$
$$Pv = S/.400$$

∴ El televisor se vendió a S/.400.

8 Una persona vende un artículo en S/. 4200 ganando el 19% del precio de costo, más el 15% del precio de venta. ¿Cuánto costó el artículo?

Resolución:

Aplicando: $Pv = Pc + G$
$Pv = S/.\ 4200$
$Pc = ?$
$G = 19\%\ Pc + 15\%\ Pv$

Reemplazando:

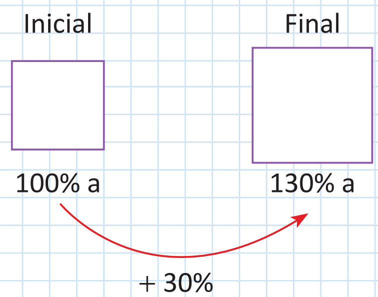
$$Pv = Pc + 19\%\ Pc + 15\%\ Pv$$
$$85\%\ Pv = 119\%\ Pc$$
$$\frac{85}{100}(4200) = \frac{119}{100}Pc$$
$$Pc = 5 \times 600$$
$$Pc = S/\ 3000$$

$\therefore$ El costo del artículo es S/.3000.

9 Si el lado de un cuadrado aumenta en 30%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

Resolución:

Graficamos:



$L_{Inicio} = 100\%$ $\qquad$ $L_{Final} = 130\%$

$A_{Inicio} = (100\%)^2$ $\qquad$ $A_{Final} = (130\%)^2$

$= 100\% \times 100\%$ $\qquad$ $= 130\% \times 130\%$

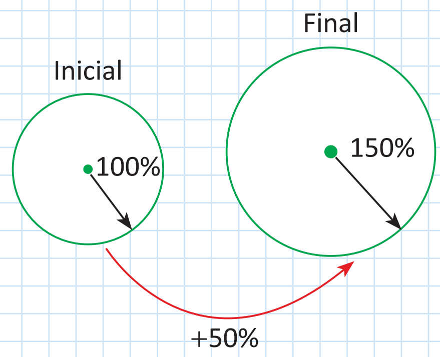
$= 100\%$ $\qquad$ $= 169\%$

+69%

$\therefore$ Su área aumenta en 69%.

10 Si el radio de un círculo aumenta en 50%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

Resolución:



$r_{inicio} = 100\%$ $\qquad$ $r_{final} = 150\%$

$A_{inicio} = \pi(100\%)^2$ $\qquad$ $A_{final} = \pi(150\%)^2$

$= \pi 100\%$ $\qquad$ $= \pi(225\%)$

+125%

$\therefore$ Aumenta en 125%.

11 Dos descuentos sucesivos del 15% y 20%. Seguido de dos aumentos de 25% y 30%, ¿a qué único descuento o aumento equivale?

Resolución:

Dos descuentos sucesivos:

$$85\% \times 80\% = \frac{85}{100} \times \frac{80}{100}$$

Dos aumentos sucesivos:

$$125\% \times 130\% = \frac{125}{100} \times \frac{130}{100}$$

Luego:

$$\frac{85}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{125}{100} \times \frac{130}{100} = 110,5\%$$

Por lo tanto:

110,5% – 100% = 10,5% (aumento).

Actividades de razonamiento

1. ¿A cuánto equivalen dos aumentos sucesivos del 30% y 10%?

A) 25% B) 40% C) 43% D) 38% E) 48%

2. ¿A cuánto equivalen tres descuentos sucesivos del 10%; 20% y 40%?

A) 45,2% B) 58% C) 60% D) 77,2% E) 56,8%

3. Halla el 80% del 40% del 15% de 1200.

A) 57,6 B) 55,2 C) 47,2 D) 75,6 E) 37,6

4. Halla el 130% del 20% del 50% de 2400.

A) 405 B) 213 C) 123 D) 312 E) 393

5. Un aumento del 30% seguido de dos descuentos sucesivos del 20% y 10%, ¿a cuánto equivale?

A) Descuento (93,6) B) Aumento (6%)
C) Descuento (6,4%) D) Aumento (8%)
E) Descuento (10%)

6. ¿Qué porcentaje de 24a es 6a?

A) 60% B) 25% C) 30% D) 40% E) 35%

7. El 30% del 20% de los 2/5 de un número equivale al 24% del 0,01% de 1000. Halla dicho número.

A) 5 B) 1 C) 2 D) 4 E) 3

8. ¿Qué tanto por ciento de (5x – 1) es $\left(x - \frac{1}{5}\right)$?

A) 10% B) 15% C) 25% D) 20% E) 18%

9. Si N aumenta 40%, ¿en qué porcentaje aumenta N^2?

A) 75% B) 60% C) 45% D) 86% E) 96%

10. Gasté el 30% de lo que no gasté. Si el 2% de lo que gasté es 72 soles, ¿cuánto tenía?

A) S/.15 600 B) S/.12 300 C) S/.12 000
D) S/.12 800 E) S/.13 500

11. ¿A cómo debo vender lo que me costó S/. 170 para ganar el 15% del precio de venta?

A) S/.120 B) S/.200 C) S/.190 D) S/.150 E) S/.180

12. ¿A cómo debo vender lo que me costó S/ 180 para ganar el 20% del precio de costo más el 10% del precio de venta?

A) S/.280 B) S/.260 C) S/.300 D) S/.270 E) S/.240

13. Después de haber perdido S/.2000, a Raúl le queda 80% del dinero que tenía ¿Qué cantidad debe recibir Raúl para tener S/.8200?

A) S/.200 B) S/.100 C) S/.300 D) S/.250 E) S/.150

14. En una playa de estacionamiento hay 56 vehículos, 14 son autos, el resto son motocicletas. ¿Qué porcentaje del total representan estas?

A) 60% B) 75% C) 80% D) 50% E) 65%

Claves

1. C	5. C	9. E	13. A
2. E	6. B	10. A	14. B
3. A	7. B	11. B	
4. D	8. D	12. E	

Reto



Se tiene 30% a = 50% b
60% b = 40% c
¿Qué tanto por ciento de a + b + c es a + c?

Rpta.: 76%

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Dos descuentos sucesivos del 20% y 30% equivalen a uno del:

   A) 40% B) 50% C) 44% D) 54% E) 56%

2. Dos aumentos sucesivos del 10% y 20% equivalen a uno del:

   A) 28% B) 30% C) 32% D) 36% E) 38%

3. Halla el 20% del 30% de 1200.

   A) 82 B) 50 C) 90 D) 72 E) 70

4. Halla el 25% del 20% de los 3/7 de 3500.

   A) 150 B) 75 C) 85 D) 200 E) 50

5. Halla el 40% del 10% de la mitad de los 8/9 de 3600.

   A) 50 B) 60 C) 64 D) 75 E) 70

6. Halla el 30% del 32% de los 5/8 de los 3/7 de la cuarta parte de 56 000.

   A) 350 B) 360 C) 500 D) 120 E) 480

7. ¿De qué número es 330 el 32% más?

   A) 300 B) 150 C) 160 D) 250 E) 175

8. ¿De qué número es 210 el 30% menos?

   A) 450 B) 250 C) 300 D) 190 E) 150

9. Un aumento del 20% seguido de dos descuentos sucesivos del 10% y 10%; ¿A cuánto equivale?

   A) Aumento 3% B) Aumento 4%
   C) Descuento 1,4% D) Descuento 2,8%
   E) Descuento 1,2%

10. ¿Qué porcentaje de 3,2a es 0,8a?

    A) 30% B) 40% C) 33% D) 25% E) 20%

NIVEL 2

11. El valor total de un artículo es 360 más el 10% de su valor total. ¿Cuál es su valor total?

    A) 400 B) 380 C) 440 D) 420 E) 460

12. Vendí un celular en S/.300. Si gané el 20% del costo, ¿cuánto dinero gané?

    A) S/.50 B) S/.25 C) S/.75
    D) S/.3100 E) S/.40

13. Compré un reloj en S/.80 y al venderlo perdí el 60% del precio de venta. ¿A cuánto lo vendí?

A) S/.40 B) S/.45 C) S/.60 D) S/.70 E) S/.50

14. ¿Qué tanto por ciento de $(4x - 1)$ es $x - \frac{1}{4}$?

A) 15% B) 10% C) 25% D) 35% E) 20%

15. ¿A cómo debo vender lo que me costó S/.360 para ganar el 20%?

A) S/.450 B) S/.480 C) S/.452
D) S/.432 E) S/.520

16. ¿A cómo debo vender lo que me costó S/.360 para ganar el 20% del precio de venta?

A) S/.320 B) S/.450 C) S/.500
D) S/.400 E) S/.420

17. He comprado un artículo a S/.210. ¿A cómo debo venderlo para ganar el 30% del precio de venta más el 30% del precio de costo?

A) S/.290 B) S/.280 C) S/.420
D) S/.190 E) S/.390

18. He comprado un artículo por S/.150. ¿A cómo debo venderlo para ganar el 40% del precio de costo más el 25% del precio de venta?

A) S/.360 B) S/.560 C) S/.280
D) S/.200 E) S/.180

19. En un aula hay 60 alumnos de los cuales 24 son mujeres. ¿Qué porcentaje del total representa los varones?



A) 60% B) 20% C) 80% D) 50% E) 40%

20. Se compra una lavadora a S/.400. Por alguna urgencia se vende con una pérdida del 25% del precio de costo. ¿A cómo se vendió?

A) S/.250 B) S/.3560 C) S/.300
D) S/.375 E) S/.200

NIVEL 3

21. ¿A cuánto equivalen tres descuentos sucesivos del 10%, 20%, 30%?

A) 52% B) 50,4% C) 45%
D) 51% E) 49,6%

22. ¿A cuánto equivalen tres aumentos sucesivos del 10%, 20%, 30%?

A) 60% B) 71,6% C) 70%
D) 28,4% E) 38,3%

23. Debo S/.400 y por la demora en el pago me cobran dos impuestos sucesivos del 10% y 40%. ¿Cuánto debo ahora?

A) S/.600 B) S/.578 C) S/.616
D) S/.630 E) S/.642

24. En una fábrica hay 480 trabajadores de los cuales el 30% son varones. Si se retiran el 50% de las mujeres, ¿cuál es el nuevo porcentaje que representa los varones?



A) 46,15% B) 51,2%
C) 472% D) 48% E) 37,3%

25. Un incremento del 10% seguido por un descuento del 10%, ¿en cuánto aumenta o disminuye?

A) Disminuye 20% B) Aumenta 9%
C) Disminuye 1% D) Disminuye 9%
E) No disminuye ni aumenta

26. Dos descuentos sucesivos del 20% y 50%, seguido por 2 incrementos del 10% y 60%, ¿a qué único descuento o incremento equivale?

A) Aumento (24,6%) B) Descuento (29,6%)
C) Aumento (32%) D) Descuento (32,5%)
E) Aumento (30%)

27. A una cuenta de 1000 dólares se le aplica un descuento del 40%, entonces la diferencia entre este descuento y dos descuentos sucesivos de 36% y 4% expresados en dólares es:

A) $14 B) $144 C) $256
D) $400 E) $14,4

28. En una reunión, el 40% de las personas son hombres. Si se retiran la mitad de ellos, ¿cuál es el nuevo porcentaje de hombres?

A) 20% B) 23,5% C)25% D)27,5% E) 30%

29. Si el lado de un cuadrado aumenta en 30%, ¿en qué porcentaje aumenta su perímetro?

A) 30% B) 60% C) 69% D) 72% E) 90%

30. Según el problema anterior, ¿en qué porcentaje aumenta el área?

A) 69% B) 30% C) 72% D) 80% E) 76%

Claves

NIVEL 1
1. C
2. C
3. D
4. B
5. C
6. B
7. D
8. C
9. D
10. D

NIVEL 2
11. A
12. A
13. E
14. C
15. D
16. B
17. E
18. C
19. A
20. C

NIVEL 3
21. E
22. B
23. C
24. A
25. C
26. B
27. E
28. C
29. A
30. A

Razones y proporciones

RAZÓN

Es la comparación que se establece entre dos cantidades de una magnitud, mediante las operaciones de sustracción o división. Lo definido nos indica que existen dos clases de razón:

Razón aritmética

Es la que se obtiene mediante la sustracción y consiste en determinar en cuanto excede una de las cantidades a la otra.
Ejemplo:
Los automóviles A y B se desplazan con velocidades de 25 m/s y 20 m/s respectivamente. Comparemos sus velocidades:

$$\underbrace{25\ \text{m/s}}_{\text{Antecedente}} - \underbrace{20\ \text{m/s}}_{\text{Consecuente}} = \overbrace{5\ \text{m/s}}^{\text{Valor de la razón}}$$

Nota
Interpretación:
La velocidad del automóvil "A" excede en 5 m/s a la velocidad del automóvil "B".

Razón geométrica

Es la que se obtiene mediante la división y consiste en determinar cuántas veces cada una de las cantidades contiene la unidad de referencia.
Ejemplo:
Los edificios M y N tienen una altura de 48 m y 36 m respectivamente. Comparemos sus alturas:

Antecedente ⟶ 48 m; Consecuente ⟶ 36 m; Valor de la razón: 4/3

$$\frac{48\ \text{m}}{36\ \text{m}} = \frac{4}{3}$$

Nota
Interpretación:
- Las alturas de los edificios M y N están en la relación de 4 a 3.
- Las alturas de los edificios M y N son entre sí como 4 es a 3.
- Las alturas de los edificios M y N son proporcionales a 4 y 3.



PROPORCIÓN

Es la igualdad en valor numérico de dos razones de la misma clase.

Proporción aritmética

Es aquella que se forma al igualar los valores numéricos de dos razones aritméticas.
Ejemplo:
Se tienen cuatro artículos cuyos precios son: S/.15, S/.13, S/.9 y S/.7, los cuales se comparan:

S/.15 – S/.13 = S/.2
S/.9 – S/.7 = S/. 2

S/.15 – S/.13 = S/.9 – S/. 7

Términos extremos: S/.15 y S/. 7
Términos medios: S/.13 y S/.9

Recuerda
Generalmente se asumen los términos de la proporción aritmética en el orden como se presentan.

(1.er término) – (2.° término) = (3.er término) – (4.° término)

Dependiendo del valor que asumen los términos medios se presentan dos tipos:

Discreta: cuando los valores de los términos medios son diferentes.
Ejemplo:
Forma una proporción aritmética con las alturas de 4 edificios que son: 25 m; 18 m; 42 m y 35 m. Veamos la nota.

Continua: cuando los valores de los términos medios son iguales.
Ejemplo:
Forma una proporción aritmética continua con los volúmenes de 4 recipientes que son: 19 L, 15 L y 11 L. Veamos la nota.

Nota
- 25 – 18 = 42 – 35
  35: cuarta diferencial de 25; 18 y 42.
- 19 – 15 = 15 – 11
  15: media diferencial de 19 y 11.
  11: tercera diferencial de 19 y 15.

Proporción geométrica

Es aquella que se forma al igualar los valores numéricos de dos razones geométricas.

Ejemplo:

Se tienen 4 recipientes cuyas capacidades son: 21 L, 7 L, 15 L y 5 L, los cuales se comparan:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{21L}{7L}=3\\[2mm]\dfrac{15L}{5L}=3\end{array}\right\}\quad \dfrac{21L}{7L}=\dfrac{15L}{5L}$$

21L y 5L: términos extremos
7L y 15L: términos medios

Dependiendo del valor que asumen los términos medios se presentan 2 clases:

Discreta: cuando los valores de los términos medios son diferentes.

Ejemplo:

Forma una proporción geométrica discreta con las notas de 4 estudiantes que son: 20; 16; 15 y 12. Veamos la nota.

Continua: cuando los valores de los términos medios son iguales.

Ejemplo:

Forma una proporción geométrica continua con las medidas de 3 ángulos que son: 12; 18 y 27. Veamos la nota.

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES (SRGE)

Consideremos razones geométricas que tienen el mismo valor numérico.

$$\frac{10}{5}=2 \qquad \frac{14}{7}=2 \qquad \frac{18}{9}=2 \qquad \frac{12}{6}=2$$

Igualando: $\dfrac{10}{5}=\dfrac{14}{7}=\dfrac{18}{9}=\dfrac{12}{6}=2$

Donde: 10; 14; 18 y 12 son los antecedentes.
5; 7; 9 y 6 son los consecuentes.
2 es la constante de proporcionalidad.

Se cumple:

- $\dfrac{10+14+18+12}{5+7+9+6}=\dfrac{54}{27}=2$
- $\dfrac{10+14+18}{5+7+9}=\dfrac{42}{21}=2$

En ambos casos la constante de proporcionalidad no varía.

$$\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}}=\text{constante}$$

- $\dfrac{10\times 14\times 18\times 12}{5\times 7\times 9\times 6}=2\times 2\times 2\times 2=2^4$
- $\dfrac{10\times 14\times 18}{5\times 7\times 9}=2\times 2\times 2=2^3$

Al multiplicar los antecedentes y consecuentes, la constante de proporcionalidad se ve afectada de un exponente que es igual al número de razones que se consideran en la multiplicación.

$$\frac{\text{Producto de antecedentes}}{\text{Producto de consecuentes}}=(\text{constante})^n$$

n: número de razones que se multiplican.



Recuerda

Generalmente se asumen los términos de la proporción en el orden como se presentan.

$$\frac{1.^{er}\ \text{Término}}{2.^{\circ}\ \text{Término}}=\frac{3.^{er}\ \text{Término}}{4.^{\circ}\ \text{Término}}$$

Nota

- $\dfrac{20}{16}=\dfrac{15}{12}$

  12: cuarta proporcional de 20, 16 y 15
- $\dfrac{12}{18}=\dfrac{18}{27}$

  18: media proporcional de 12 y 27.

  27: tercera proporcional de 12 y 18.



Recuerda

Existen SRGE donde el primer consecuente es igual al segundo antecedente, el segundo consecuente es igual al tercer antecedente y así sucesivamente. A este tipo de serie se le denomina: **Serie de razones geométricas continúas equivalentes:**

$$\frac{81}{54}=\frac{54}{36}=\frac{36}{24}=\frac{24}{16}$$

Problemas resueltos

1 Las edades de dos hermanos son como 3 es a 5, dentro de 11 años la razón será de 2 a 3. Halla la edad del mayor.

Resolución:

Sean: a y b las edades.

Según el enunciado: $\frac{a}{b} = \frac{3k}{5k}$

Dentro de 11 años la razón será de 2 a 3

$$\frac{3k + 11}{5k + 11} = \frac{2}{3}$$

$$9k + 33 = 10k + 22$$

$$K = 11$$

$\therefore$ Mayor: $5(11) = 55$

2 Dada la siguiente serie de razones geométricas iguales:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{11}$$

Halla la suma de los antecedentes; si:
$3a + 2b - c = 84$

Resolución:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{11} = k$$

$a = 7k;\ b = 9k;\ c = 11k$

Por dato:

$$3a + 2b - c = 84$$

$$3(7k) + 2(9k) - 11k = 84$$

$$21k + 18k - 11k = 84$$

$$28k = 84$$

$$k = 3$$

Luego: $\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{11} = 3$

$$a + b + c = 3(7 + 9 + 11)$$

$$a + b + c = 81$$

3 Dos números enteros son entre sí como 15 es a 8. Si la suma de la tercera parte del mayor y la mitad del menor es 108, halla el menor de los números.

Resolución:

Sean: a y b los números.

Según el enunciado: $\frac{a}{b} = \frac{15k}{8k}$

Por dato: $\frac{1}{3}(15k) + \frac{1}{2}(8k) = 108$

$$5k + 4k = 108$$

$$9k = 108$$

$$k = 12$$

$\therefore$ Menor: $8(12) = 96$

4 Si el valor de la razón aritmética y geométrica de dos números es 5, ¿cuál es la suma de dichos números?

Resolución:

Sean: a y b los números

RG $(a; b) = 5 \Rightarrow \frac{a}{b} = 5 \quad a = 5b$

RA $(a; b) = 5 \Rightarrow a - b = 5$

$$5b - b = 5$$

$$4b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{4}$$

Luego:

$a = 5\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{4}$

$\therefore\ a + b = \frac{25}{4} + \frac{5}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

5 En la siguiente serie de razones iguales $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$; el producto de los antecedentes es 192. Halla la suma de los consecuentes.

Resolución:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \frac{a.b.c}{2.\,3.4} = k^3$$

$$\frac{192}{24} = k^3$$

$$k^3 = 8$$

$$k = 2$$

Luego: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = 2$

$$\frac{a + b + c}{2 + 3 + 4} = 2$$

$$a + b + c = 2(2 + 3 + 4)$$

$$a + b + c = 18$$

6 A una fiesta concurren 400 personas, entre hombres y mujeres, asistiendo 3 hombres por cada 2 mujeres. Si luego de 5 horas por cada 2 hombres hay una mujer. ¿Cuántas parejas se retiraron?

Resolución:

$\frac{H}{M} = \frac{3k}{2k}$

$$H + M = 400$$
$$3k + 2k = 400$$
$$5k = 400$$
$$k = 80$$

Entonces: $H = 240$; $M = 160$

Luego de 5 horas se retiran x parejas:

$$\frac{240 - x}{160 - x} = \frac{2}{1}$$
$$240 - x = 320 - 2x$$
$$x = 80$$

$\therefore$ Se retiraron 80 parejas.

7 En una proporción geométrica continua la suma de los cuatro términos es 100. ¿Cuál es la suma de las raíces cuadradas de los extremos?

Resolución:

Sea: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ la proporción geométrica continua

Luego: $\frac{ck^2}{ck} = \frac{ck}{c} = k$

Dato: $ck^2 + 2ck + c = 100$

$$c(k^2 + 2k + 1) = 100$$
$$c(k + 1)^2 = 100$$
$$c(k + 1)^2 = 4 \times 5^2$$
$$c = 4;\ k = 4$$

Entonces $\frac{64}{16} = \frac{16}{4}$

$\therefore$ Piden $\sqrt{64} + \sqrt{4} = 10$

8 La razón aritmética de dos números es a la razón geométrica como el menor es a 7/4. ¿En qué relación se encuentran los números?

Resolución:

Sean: a y b los números

Dato: $\frac{RA(a;b)}{RG(a;b)} = \frac{b}{\frac{7}{4}}$

$$\frac{a - b}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{\frac{7}{4}}$$
$$\frac{b(a - b)}{a} = \frac{4b}{7}$$
$$7a - 7b = 4a$$
$$3a = 7b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

9 Si: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{2}{5}$

Halla $E = \frac{A^3 + B^3 + C^3 + 16}{a^3 + b^3 + c^3 + 250}$

Resolución:

$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{2}{5}$

Elevando al cubo:

$$\frac{A^3}{a^3} = \frac{B^3}{b^3} = \frac{C^3}{c^3} = \frac{8 \times 2}{125 \times 2} = \frac{8}{125}$$
$$\frac{A^3 + B^3 + C^3 + 16}{a^3 + b^3 + c^3 + 250} = \frac{8}{125}$$

$\therefore E = \frac{8}{125}$

10 Se tienen: $\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{D}{6}$

Además: $A \times B \times C \times D = 29160\ (A + D)$

Halla "$A + B + C + D$"

Resolución:

$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{D}{6} = k$

$A = 3k$; $B = 4k$; $C = 5k$; $D = 6k$

Luego: $A \times B \times C \times D = 29160\ (A + D)$

$$3k \times 4k \times 5k \times 6k = 29160\ (3k + 6k)$$
$$3 \times 4 \times 5 \times 6 \times k^4 = 29160 \times 9k$$
$$k^3 = 729$$
$$k = 9$$

Finalmente: $\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{D}{6} = 9$

$$\frac{A + B + C + D}{3 + 4 + 5 + 6} = 9$$
$$A + B + C + D = 9 \times 18$$
$$A + B + C + D = 162$$

Actividades de razonamiento

1. Dos números son entre sí como 10 es a 9. Si la suma de la mitad del mayor y la tercera parte del menor es 120, halla el menor de los números.

A) 150 B) 120 C) 140 D) 165 E) 135

2. Las edades de dos personas son entre sí como 5 es a 7. Dentro de 8 años la razón de sus edades será de 3 a 4. Halla la mayor edad.

A) 56 B) 40 C) 48 D) 54 E) 45

3. Las edades actuales de dos personas son 50 y 40. ¿Dentro de cuántos años la relación de sus edades será igual a 8/7?

A) 30 B) 28 C) 36 D) 32 E) 40

4. ¿Dentro de cuántos años la relación de las edades de dos amigos será igual a 7/6, si sus edades actuales son 39 y 28 años?

A) 42 B) 45 C) 38 D) 37 E) 39

5. Si 8 es la cuarta proporcional de "a", 6 y "b"; y "a" es la cuarta proporcional de "b", 16 y 48, halla el valor de (b – a).

A) 5 B) 12 C) 6 D) 8 E) 10

6. La cuarta proporcional de 6; 15 y "a" es 20 y la media proporcional de 36 y "b" es 12. Halla la cuarta proporcional de "a", "b" y 60.

A) 32 B) 30 C) 36 D) 34 E) 35

7. Si: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = 3$

Halla el valor de:

$$E = \left(\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 9}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1}\right) \times \left(\frac{A + B + C + D + 3}{a + b + c + d + 1}\right)$$

A) 24 B) 33 C) 30 D) 21 E) 27

8. Si: $\frac{V}{448} = \frac{E}{V} = \frac{N}{E} = \frac{U}{N} = \frac{S}{U} = \frac{7}{S} = k$

Calcula: (V + E + N + U + S)

A) 436 B) 332 C) 434 D) 338 E) 328

9. Si se cumple que: $\frac{\sqrt{x}}{39}=\frac{\sqrt{y}}{65}=\frac{\sqrt{z}}{91}$

Además: x . y = 3600, calcula el valor de z – y + x.

A) 136 B) 132 C) 128 D) 130 E) 140

10. Si: $\frac{a}{91}=\frac{b}{221}=\frac{c}{299}$ y $5a-42=2c-b$

Calcula "b".

A) 116 B) 117 C) 115 D) 119 E) 121

11. Si: $\frac{D}{972}=\frac{Y}{D}=\frac{N}{Y}=\frac{A}{N}=\frac{4}{A}$

Halla: D + Y + N + A

A) 480 B) 360 C) 540 D) 270 E) 520

12. La suma, diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que los números 5; 3 y 16 respectivamente. Determina estos números.

A) 8 y 4 B) 4 y 2 C) 16 y 4 D) 6 y 4 E) 12 y 4

13. Si: $\frac{M}{R}=\frac{A}{O}=\frac{N}{S}=\frac{U}{I}=\frac{E}{T}=\frac{L}{A}$

Además: $M+A+N+U+E+L=54$ y $\frac{N+S}{N-S}=5$

Calcula el valor de: R + O + S + I + T + A

A) 30 B) 32 C) 38 D) 40 E) 36

14. Si: $\frac{x}{4}=\frac{m}{x}=\frac{b}{m}$ y $\frac{x^4}{16}\neq xb=288$. Halla "m".

A) 12 B) 8 C) 16 D) 10 E) 15

Claves

1. E	5. D	9. B	13. E
2. A	6. B	10. D	14. A
3. A	7. E	11. A	
4. C	8. C	12. C	

Reto



En un centro comercial hay 1365 personas entre varones, mujeres y niños. El número de mujeres es al número de varones como 2 es a 5 y el número de niños es al de mujeres como 7 es a 3. ¿Cuántos varones hay en el centro comercial?

Rpta.: 585

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. La suma de 2 números es 693 y su razón geométrica es 2/9. Halla el número menor.

   A) 126 B) 96 C) 136 D) 106 E) 146

2. Si la diferencia de 2 números es 195 y su razón geométrica 3/8, halla el número menor.

   A) 128 B) 116 C) 117 D) 87 E) 127

3. Juan tiene 47 años y Marco 33 años. ¿Hace cuántos años sus edades fueron como 5 es a 3?

   A) 8 B) 10 C) 15 D) 18 E) 12

4. A una fiesta asistieron 360 personas entre hombres y mujeres, observándose que por cada 7 hombres hay 5 mujeres. Si se retiran 30 parejas, ¿cuál es la nueva relación entre hombres y mujeres?

   A) 5/2 B) 3/2 C) 2/3 D) 2/5 E) 7/2

5. Las edades de Fiorela y Giuliana están en la relación de 8 a 9. Si dentro de 12 años sus edades sumarán 75, calcula la diferencia de sus edades.

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. El número de niños y niñas en una fiesta está en relación de 3 a 5. Si luego de 2 horas llegan 8 parejas y 4 niños la nueva relación es de 8 a 13. Halla el número de personas inicialmente.

   A) 836 B) 732 C) 822 D) 736 E) 756

7. Dos números son entre si como 9 es a 8. Si la suma de la cuarta parte del menor con la tercera parte del mayor es 75. Calcula el menor de los números.

   A) 96 B) 120 C) 116 D) 112 E) 108

8. La cuarta proporcional de 24; "a" y 10 es 25. ¿Cuál es la media proporcional de "a" y 15?

   A) 25 B) 36 C) 42 D) 30 E) 18

9. ¿Qué cantidad se debe añadir a cada uno de los siguientes números: 24; 12; 9 y 3; para obtener una proporción geométrica?

   A) 2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 6

NIVEL 2

10. Si 5 es la cuarta proporcional de "a"; 6 y "b"; además "b" es la cuarta proporcional de "a"; 9 y 30, halla a + b.

    A) 30 B) 25 C) 33 D) 36 E) 27

11. Halla la cuarta proporcional de 56; "m" y "n", sabiendo que "m" es la media proporcional de 28 y 7; y "n" es la tercera proporcional de 9 y 12.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

12. En una proporción geométrica continua la razón es 4/7. Si la media proporcional es 28, calcula la suma de los extremos.

A) 65 B) 45 C) 55 D) 35 E) 50

13. En una proporción aritmética continua, la suma de los extremos es 24. Calcula la media diferencial.

A) 8 B) 15 C) 20 D) 18 E) 12

14. En una proporción aritmética la suma de los términos es 98, además los extremos están en la relación de 4 a 3. Calcula la diferencia de estos.

A) 5 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

15. La suma de 2 números es 270 y cuando se le agrega 65 a cada uno de ellos su razón es 3/5. Halla el número menor.

A) 90 B) 95 C) 85 D) 105 E) 115

16. Si a cada uno de los números: 100; 50 y 20 le agregamos una misma cantidad se obtiene una proporción geométrica continua cuya media proporcional es:

A) 75 B) 20 C) 50 D) 15 C) 18

17. Si: $\frac{a}{9}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}$; además: $a+b=72$. Calcula $(a-c)$.

A) 36 B) 42 C) 30 D) 48 E) 54

18. Si: $\frac{R}{288}=\frac{U}{R}=\frac{B}{U}=\frac{I}{B}=\frac{9}{I}$. Calcula: $R+U+B+I$

A) 188 C) 225 C) 250 D) 196 E) 270

19. Si se cumple: $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{8}$; además:

$\left(\frac{a+b+c}{a+c-b}\right).\ b=210$

Calcula el valor de: $3a-b+c$

A) 116 B) 136 C) 127 D) 126 E) 140

NIVEL 3

20. Si: $\frac{L}{640}=\frac{U}{L}=\frac{R}{U}=\frac{D}{R}=\frac{E}{D}=\frac{S}{E}=\frac{5}{S}$

Calcula: $(L+U+R+D+E+S)$

A) 630 B) 650 C) 680 D) 675 E) 620

21. Si: $\frac{M}{m}=\frac{N}{n}=\frac{P}{p}=\frac{Q}{q}=2$

Halla el valor de:

$$\left(\frac{M^2+N^2+P^2+Q^2+4}{m^2+n^2+p^2+q^2+1}\right)\times\left(\frac{M+N+P+Q+2}{m+n+p+q+1}\right)$$

A) 4 B) 16 C) 8 D) 27 E) 64

22. Si: $\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p} = \frac{3}{7}$

Halla: $E = \frac{M^3 + N^3 + P^3 + 54}{m^3 + n^3 + p^3 + 686}$

A) 27/243 B) 343/27 C) 9/49
D) 21/343 E) 27/343

23. Si: $\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p} = \frac{5}{2}$ Calcula el valor de:

$E = \frac{M + N + P + 35}{m + n + p + 14} + \frac{M^2 + N^2 + P^2 + 75}{m^2 + n^2 + p^2 + 12}$

A) 25/4 B) 37/4 C) 37/4
D) 35/4 E) 27/4

24. Sea: $\frac{D}{M} = \frac{O}{E} = \frac{R}{L} = \frac{I}{A} = \frac{T}{N} = \frac{A}{Y}$

Si: $D + O + R + I + T + A = 48$ y $\frac{R + L}{R - L} = 3$

Calcula: $M + E + L + A + N + Y$

A) 12 B) 24 C) 16 D) 18 E) 30

25. Sabiendo que:

$\frac{F}{768} = \frac{I}{F} = \frac{O}{I} = \frac{R}{O} = \frac{E}{R} = \frac{L}{E} = \frac{A}{L} = \frac{3}{A}$

Calcula: $F + I + O + R + E + L + A$

A) 862 B) 764 C) 762 D) 756 E) 732

26. En la serie: $\frac{a}{7} = \frac{b}{7 - n} = \frac{d}{3} = \frac{e}{n + 7}$

Además: $(a + b + e) = 84$

Calcula: $a - d$

A) 8 B) 16 C) 12 D) 18 E) 20

27. En una serie de 4 razones geométricas equivalentes los antecedentes son: 5; 7; 11 y 12. Si la suma de los dos últimos consecuentes es 92. Calcula la diferencia de los otros dos consecuentes.

A) 12 B) 20 C) 16 D) 4 E) 8

28. Si: $\frac{\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}} = \frac{7}{3}$, halla el valor de $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

A) 25/4 B) 3/4 C) 81/4
D) 49/4 E) 121/4

Claves

NIVEL 1
1. A
2. C
3. E
4. B
5. C
6. D
7. B
8. D
9. E

NIVEL 2
10. C
11. B
12. A
13. E
14. D
15. C
16. A
17. B
18. E
19. D

NIVEL 3
20. A
21. C
22. E
23. D
24. B
25. C
26. B
27. E
28. A

Orden de información

DEFINICIÓN

Este tipo de problemas requieren del ordenamiento lógico de datos, los cuales están aparentemente desordenados. Estos datos contienen necesariamente toda la información que necesitamos. Bastará con ordenarlos de acuerdo a ciertas premisas o encontrando correspondencia entre los mismos.

ORDENAMIENTO CRECIENTE O DECRECIENTE

Una buena forma de guiarse en este caso es trazar varias rectas según sea necesario, horizontal o vertical, para ir ubicando a manera de puntos los datos del problema que queremos ordenar.

Importante

Para solucionar estos problemas, es recomendable elaborar una serie de gráficos tales como líneas horizontales y verticales; círculos o los llamados cuadros de doble entrada.



Ejemplo:
En una oficina trabajan 5 empleados. Se sabe que:

- Richard gana más que Manuel.
- José gana menos que Marco.
- Raúl no es el que más gana.
- José gana más que Richard.
- Raúl gana el doble que José.

¿Quién es el que gana más?

Resolución:

- Richard gana más que Manuel.

  Richard
  Manuel

- José gana menos que Marco.

  Marco
  José

- José gana más que Richard.

  José
  Richard

- Raúl gana el doble que José.

  Raúl
  José

- Luego: Raúl no es el que más gana.

  Marco
  Raúl
  José
  Richard
  Manuel

∴ Marco es el que más gana.

ORDENAMIENTO CIRCULAR

En este tipo de problemas debemos considerar el sentido horario para señalar la izquierda y el sentido antihorario para señalar la derecha.

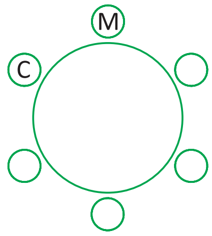
Ejemplo:
6 amigos: Miguel, Nicolás, Cecilia, Dayana, Elisa y Fernando se sientan alrededor de una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

- Nicolás y Elisa no se sientan juntos.
- Miguel y Elisa se sientan juntos.
- Fernando se sienta frente a Miguel.
- Cecilia se sienta junto y a la derecha de Miguel.
- Cecilia está frente a Dayana.

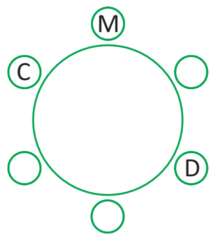
¿Quiénes se sientan a la derecha de Dayana?

Resolucion:

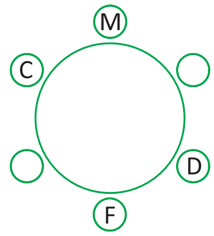
- Cecilia se sienta junto y a la derecha de Miguel.



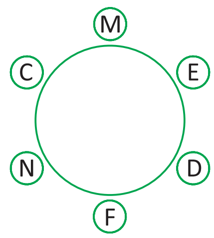
- Cecilia está frente a Dayana.



- Fernando se sienta junto a Miguel.

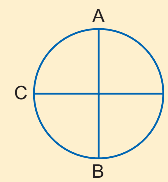


- Miguel y Elisa se sientan juntos.



∴ A la derecha de Dayana se sientan Elisa y Miguel.

Recuerda



"A" está frente a "B"
"C" está a la derecha de "A"
"C" está a la izquierda de "B"



ORDENAMIENTO POR POSICIÓN DE DATOS

Se recomienda construir un cuadro de doble entrada para luego ubicar los datos de acuerdo a la información que tenemos.
Luego de descubrir un dato podemos descartar toda la fila y toda la columna correspondiente al recuadro encontrado.

Ejemplo:

Ángel, Beto, César y Darío son 4 amigos que practican un deporte cada uno: fútbol, vóley, básquet y tenis, no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Ángel y el voleibolista son vecinos.
- César es primo del tenista.
- Beto y el basquetbolista se conocen desde pequeños.
- Darío no es tenista ni futbolista.
- Beto se ha comprado una pelota nueva de vóley.

¿Qué deporte practica César?

Resolución:

- Ángel y el voleibolista son vecinos, entonces Ángel no practica vóley.
- Beto y el basquetbolista se conocen, entonces Beto no es basquetbolista.
- César es primo del tenista, entonces César no es tenista.
- Darío no es tenista ni futbolista.
- Beto practica vóley.

Ordenando los datos en una tabla:

	Fútbol	Vóley	Básquet	Tenis
Ángel	×	×	×	✓
Beto	×	✓	×	×
César	✓	×	×	×
Darío	×	×	✓	×

∴ César practica fútbol.

Problemas resueltos

1 De un grupo de amigas:

- Karina es la mayor de todas.
- Susana es menor que Tania.
- Ana es mayor que Rosa y que Tania.
- María es mayor que Ana.
- Rosa es mayor que Tania.

¿Quién es la menor?

Resolución:

- Como Karina es la mayor:

Karina

- Luego, Susana es menor que Tania; Rosa es mayor que Tania. Ana es mayor que Rosa y que Tania:

Karina
Ana
Rosa
Tania
Susana

- María es mayor que Ana:

Karina
María
Ana
Rosa
Tania
Susana

Por lo tanto, la menor es Susana.

2 Seis amigas deciden escalar una montaña. Carla está más abajo que Juana quien se encuentra un lugar más abajo que María.
Fernanda está más arriba que Carla, pero un lugar más abajo que Paola quien está más abajo que Rosa. Rosa está entre Juana y Paola.
¿Quién está en el cuarto lugar del ascenso?

Resolución:

- En este caso utilizaremos una recta vertical.
- Del primer párrafo deducimos lo siguiente:

María
Juana > Posición continua
Carla

- Del segundo párrafo deducimos:

Juana
Rosa
Paola > Posición continua
Fernanda
Carla

- Entonces, la ubicación correcta es:

1.° María
2.° Juana
3.° Rosa
4.° Paola
5.° Fernanda
6.° Carla

Por lo tanto, en cuarto lugar está Paola.

3 4 amigos: Axel, Belisario, Casimiro y Dalmiro, viven en un mismo edificio en diferentes pisos. Si se sabe que:

- Belisario vive en el primer piso.
- Casimiro vive adyacente a Dalmiro y Belisario.
- Axel vive más arriba que Dalmiro.

¿En qué piso vive Dalmiro?

Resolución:

- Belisario vive en el primer piso.

Belisario

- Casimiro vive adyacente a Dalmiro y Belisario.

Dalmiro
Casimiro
Belisario

- Axel vive más arriba que Dalmiro.

Axel
Dalmiro
Casimiro
Belisario

∴ Dalmiro vive en el 3.er piso.

4 En un concurso de glotones se han pesado 7 personas y se obtuvieron los siguientes resultados:

- William pesa menos que Igor, pero más que Jerónimo.
- Jonás pesa igual que Mario, pero más que Igor.
- Katty pesa más que Jerónimo pero menos que William.
- Mario pesa más que Jerónimo, pero menos que Eder.

a) ¿Quién es el más pesado de los concursantes?
b) ¿Cuántas personas pesan más que Katty?

Resolución:

- William pesa menos que Igor pero más que Jerónimo.

Igor
William
Jerónimo

- Jonás pesa igual que Mario pero más que Igor.

Jonás – Mario
Igor

- Katty pesa más que Jerónimo pero menos que William.

William
Katty
Jerónimo

- Mario pesa más que Jerónimo pero menos que Eder.

Eder
Mario
Jerónimo

- Luego:

Eder
Mario – Jonás
Igor
William
Katty
Jerónimo

a) El más pesado es Eder.
b) 5 personas (Eder, Mario, Jonás, Igor y William).

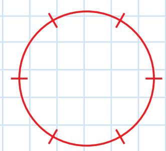
5 Alberto invita a cenar a sus amigos Betty, Celinda, Daniel, Eduardo y Felipe, este último por motivos de fuerza mayor no pudo asistir.
Se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente.
Si:

- Alberto se sienta junto a Eduardo y Daniel.
- Frente a Eduardo se sienta Betty.
- Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío.

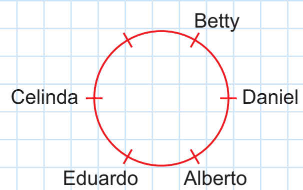
¿Entre quiénes se sienta Eduardo?

Resolución:

- Graficamos una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente.



- Ubicamos a Alberto en cualquier posición y a partir de ese dato empezamos a colocar a las demás personas; resultando:

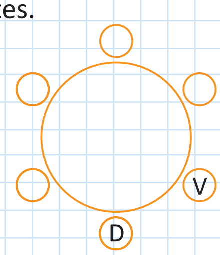


Por lo tanto, Eduardo está entre Alberto y Celinda.

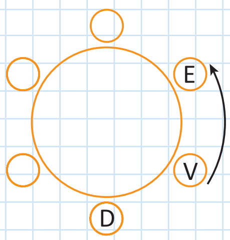
6 En una mesa se han sentado simétricamente distribuidos 6 matemáticos: Einstein no está sentado junto a Newton ni Gauss, Descartes no está sentado junto a Newton, ni junto a Fibonacci, Villarreal está sentado junto a la derecha de Descartes y Einstein está sentado a la derecha de Villarreal. ¿Quién está sentado junto y a la derecha de Fibonacci?

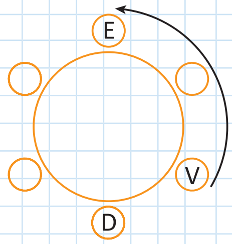
Resolución:

- Villarreal está sentado junto y a la derecha de Descartes.

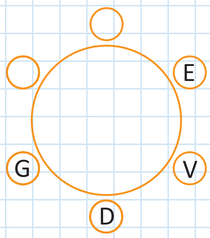


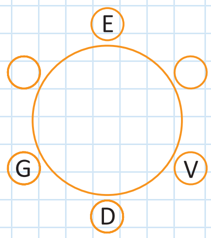
- Einstein está sentado a la derecha de Villarreal, entonces existen 2 posibilidades:



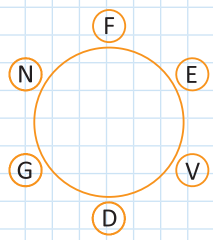


- Descartes no está sentado junto a Newton y ni junto a Fibonacci:





- Einstein no está sentado junto a Newton ni Gauss, entonces el segundo caso no cumple.



∴ Newton está sentado junto y a la derecha de Fibonacci.

7 Elder, Aníbal y Miguel son 3 destacados deportistas en fútbol, vóley y básquet.
Si sabe que:

- A Elder y Miguel no les gusta el básquet.
- A Miguel no le gusta el fútbol.

a) ¿Qué deporte practica Aníbal?
b) ¿Quién practica fútbol?

Resolución:

- A Elder y Miguel no les gusta el básquet, entonces Aníbal practica básquet.
- A Miguel no le gusta el fútbol, entonces Miguel práctica vóley.
- Luego, Elder practica fútbol.

	Fútbol	Vóley	Básquet
Elder	✓	×	×
Aníbal	×	×	✓
MIguel	×	✓	×

a) Básquet
b) Elder

8 Ángel, Bryan, Cristian y Darío son cuatro detectives que se han especializado en combatir diferentes modalidades de delitos: robo, estafa, secuestros y asesinatos, no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Cristian capturó al cabecilla del último asalto a un banco.
- En una intervención del departamento de homicidios, Bryan fue herido de bala.
- Hace un tiempo, Ángel rescató a una niña de manos de un captor.

a) ¿Qué especialidad tiene Ángel?
b) Cierta persona engañó a una anciana con el cuento de la "casa propia". El detective que se encargará de este caso es:

Resolución:

- Cristian capturó al cabecilla del último asalto a un banco, entonces Cristian es detective de robo.
- Bryan fue herido de bala en una intervención del departamento de homicidios, entonces Bryan es detective de asesinatos.
- Ángel rescató a una niña de manos de un captor, entonces Ángel es detective de secuestros.
- Luego: Darío será detective de estafa.
- Ordenado en un cuadro se tiene:

	Robo	Estafa	Secuestro	Asesinato
Ángel	×	×	✓	×
Bryan	×	×	×	✓
Cristian	✓	×	×	×
Darío	×	✓	×	×

a) Ángel - Secuestro
b) Darío

Actividades de razonamiento

1. El señor Paibar y el señor Castro tienen la misma cantidad de bonos de una empresa en la cual prestaron servicios. Paibar, sin embargo, tiene más bonos que el señor Ruiz, quien tiene más bonos que el señor Prado. El señor Aguilar tiene menos bonos que Paibar, pero más que Prado y no tanto como Ruiz. El señor Castro tiene menos bonos que Pérez. El que tiene menos, tiene 500 bonos, además, entre lo que tiene cada uno de ellos, hay una diferencia de 1000. ¿Cuántos bonos tiene el señor Pérez?

   A) 3500 B) 4500 C) 500 D) 2500 E) 1500

2. Se tiene un edificio de seis pisos en el cual viven 6 personas: A, B, C, D, E y F, cada una en un piso diferente. Se sabe lo siguiente:
   - E vive adyacente a C y B.
   - Para ir de donde vive E a F hay que bajar 3 pisos.
   - A vive en el segundo piso.

   ¿Quién vive en el último piso?

   A) B B) C C) D D) E E) F

3. La ciudad Amarilla tiene más habitantes que la ciudad Blanca (dato I). La ciudad Blanca tiene menos habitantes que la ciudad Verde, pero más que la ciudad Roja (dato II). Si la ciudad Amarilla tiene menos habitantes que la ciudad Verde (dato III), ¿qué ciudad tiene más habitantes?

   A) Amarilla B) Blanca C) Verde
   D) Roja E) Faltan datos

4. En un edificio de 4 pisos viven 4 amigos, cada uno en pisos diferentes. Ángel vive un piso más arriba que Gina (dato I). Víctor habita más arriba que Ingrid (dato II) y Ángel más abajo que Ingrid (dato III). ¿En qué piso vive Víctor?

   A) 1.° B) 2.° C) 3.°
   D) 4.° E) Faltan datos

5. 4 amigas viven en un edificio de 4 pisos (cada una en un piso). Alfonsina vive en el primer piso, Mónica vive abajo de Jacinta; Vicky vive un piso más arriba que Mónica. ¿En qué piso vive Vicky?

   A) 1.° B) 2.° C) 3.°
   D) 4.° E) Faltan datos

6. De un grupo de amigos se sabe que:
   - Ariel no es mayor que Brian.
   - Carlos no es mayor que Danilo.
   - Danilo no es el mayor.
   - Edú es mayor que Ariel.
   - Danilo es mayor que Edú.

   ¿Quién es el mayor?

   A) Ariel B) Brian C) Carlos D) Danilo E) Edú

7. Entre los socios de una empresa; "A" tiene menos capital que "B"; "B" tienen más capital que "C", pero menos que D", ¿cuál de las afirmaciones es cierta?

   A) A tiene menos capital que C.
   B) A tiene más capital que D.
   C) A tiene más capital que C.
   D) A tiene menos capital que D.
   E) A tiene igual capital que C.

8. Si sabemos que:
   - Jorge es 3 cm más alto que Manuel.
   - Nataly es 2 cm más baja que Manuel.
   - Raúl es 5 cm más bajo que Jorge.
   - Vanessa es 3 cm más baja que Manuel.

   Podemos afirmar que:

   I. Raúl y Nataly son de la misma talla.
   II. Vanessa es la más baja.
   III. Manuel es el más alto.

   A) Todas B) I y II C) Solo I
   D) II y III E) I y III

9. En una mesa circular hay 6 asientos simétricamente colocados. Se ubican 6 amigos para hablar de deportes. Se sabe que:

- Chicho y Pipo no se sientan junto a Toto.
- Lucho se sienta junto y a la derecha de Toto.
- Quique no se sienta junto a Toto ni a Dino.
- Pipo y Dino no se sientan junto a chicho.

¿Quiénes se sientan a la izquierda de Toto?

A) Chicho y Quique B) Quique y Lucho C) Pipo y Quique D) Dino y Pipo E) Lucho y Pipo

10. 3 peruanos: Félix, Jesús y Gonzalo se reúnen con 3 chilenos: Ramiro, Armando y Lucas; se ordenan alrededor de una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

- Los que tienen la misma nacionalidad, no se sientan juntos.
- Armando está entre Gonzalo y Jesús.
- Ramiro está a la derecha de Gonzalo.

¿Quién está frente a Lucas?

A) Jesús B) Gonzalo C) Armando D) Félix E) Ramiro

11. Tres amigas: Lucía, Chela y Victoria cumplen años los días 9; 12 y 16 durante los meses de abril, octubre y diciembre, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

I. El 12 de octubre ninguna de ellas cumple años.
II. Chela celebra su cumpleaños el 15 de diciembre, con un día de anticipación de la fecha real.
III. El 16 de abril ninguna cumple años.
IV. Victoria no nació en octubre.

¿Cuándo es el cumpleaños de Lucía?

A) 9 de octubre B) 12 de diciembre C) 16 de octubre D) 9 de abril E) 16 de diciembre

12. Tres amigas: Karin, Giovanna y Milagros, viven en 3 distritos diferentes: Miraflores, Breña y Surco, aunque no necesariamente en ese orden. Ellas se movilizan usando un medio de transporte distinto: auto petrolero, camioneta y auto gasolinero. Se sabe que:

I. Cuando Giovanna se compre una camioneta visitará Surco.
II. Desde que Milagros vive en Breña vendió su auto gasolinero.
III. La que vive en Miraflores tiene 2 autos petroleros.

¿En qué distrito vive Karin y qué transporte usa?

A) Miraflores - Auto gasolinero B) Surco - Auto gasolinero C) Breña - Camioneta
D) Breña - Auto petrolero E) Surco - Camioneta

13. Celso, Ramón y Teófilo son 3 periodistas que trabajan en: televisión, radio y periódico. Se sabe que:

- Ramón trabaja en la televisión
- Celso no trabaja en la radio.

¿Quién trabaja en el periódico?

A) Celso B) Ramón C) Teófilo D)Juan E) Faltan datos

14. Los Flores, Cubas, Guerrero y Anicama son cuatro familias limeñas que van a viajar en sus vacaciones a Cusco, Arequipa, Huancavelica y Moquegua, no necesariamente en este orden. Se sabe que:

- Ninguna familia fue al lugar de nacimiento de los padres.
- El señor Guerrero y su familia viajarán a Arequipa.
- La familia Anicama no viajará a Cusco ni Moquegua.
- El señor Flores es de Huancavelica y su esposa de Cusco.

¿Dónde viajarán, a pasar sus vacaciones, los Anicama?

A) Moquegua B) Cusco C) Arequipa D) Faltan datos E) Huancavelica

Claves

1. B 2. C 3. C 4. D 5. C 6. B 7. D 8. B 9. D 10. B 11. A 12. B 13. A 14. E

Reto



Se tiene un edificio de 4 pisos y en cada piso vive una familia. La familia Peña vive un piso más arriba que la familia Iturriaga, la familia Elguera habita más arriba que los Solari, y los Peña viven más abajo que los Solari. ¿En qué piso viven los Peña y los Solari respectivamente?

Rpta.: 2.° y 3.er piso

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Cinco amigos están sentados en una banca en el cine, ubicados uno a continuación de otro. Zenaida y Pedro se ubican en forma adyacente. Pedro no está al lado de Silvia ni de Juan. Zenaida está a un extremo. Si Silvia y Manuel están peleados, ¿quién se sienta al lado de Silvia?

   A) Zenaida B) Pedro C) Juan
   D) Manuel E) José

Juego lógico 1

Gigy, Mily, Pily y Poly postularán a cuatro universidades distintas: Lima, Pacífico, Unifé y Católica. Cada una postulará solo a una universidad. Se sabe que:

- Si Pily postula a Lima, entonces Gigy postulará a Pacífico.
- Si Poly postula a Lima, entonces Pily postulará a Unifé.
- Gigy no postulará a Lima.

2. Es posible que Gigy, Mily, Pily y Poly postulen respectivamente a:

   A) Unifé, Pacífico, Lima y Católica.
   B) Católica, Pacífico, Unifé y Lima.
   C) Unifé, Pacífico, Católica y Lima.
   D) Lima, Unifé, Pacífico y Católica.
   E) Unifé, Católica, Pacífico y Lima.

3. Si Mily postula a Unifé, entonces se cumple que ________ postulará a ________.

   A) Gigy - Lima B) Pily - Pacífico
   C) Poly - Pacífico D) Gigy - Pacífico
   E) Pily - Unifé

4. Si Pily postula a Pacífico, entonces es imposible que ________ postule a ________.

   A) Gigy - Católica B) Mily - Unifé
   C) Poly - Unifé D) Mily - Lima
   E) Poly - Católica

5. Si Gigy postula a Unifé, entonces:

   A) Poly postulará a Pacífico.
   B) Pily postulará a Pacífico.
   C) Mily postulará a Católica.
   D) Poly postulará a Católica.
   E) Mily postulará a Lima.

Juego lógico 2

Beto, José, Jorge, Jimmy y Fernando son promotores de ventas de una gran empresa que está comenzando a vender sus productos a nivel internacional y mañana deben viajar a Argentina a diferentes lugares para promocionar dichos productos. Los lugares a donde irán son: Córdoba, Formosa, Jujuy, San Juan y Tucumán, pero bajo las siguientes condiciones:

- Si Jimmy viaja a San Juan, Fernando no viaja a Córdoba.
- José viaja a Formosa, si Jorge viaja a Jujuy.
- Jorge viaja a Jujuy si y solo si Fernando viaja a San Juan.
- Todos los promotores deben viajar a lugares diferentes.

6. ¿A qué lugares pueden viajar mañana Beto, José, Jorge, Jimmy y Fernando respectivamente?

   A) Córdoba, Formosa, Jujuy, San Juan y Tucumán.
   B) Córdoba, Tucumán, Jujuy, Formosa y San Juan.
   C) Córdoba, Formosa, Jujuy, Tucumán y San Juan.
   D) Formosa, Córdoba, Jujuy, San Juan y Tucumán.
   E) Formosa, Jujuy, Tucumán, San Juan y Córdoba.

7. Si Jimmy viaja mañana a San Juan para promocionar sus productos, entonces es posible que:
   I. Jorge viaje a Jujuy.
   II. Fernando viaje a Córdoba.
   III. Beto viaje a Tucumán.

   A) I y II   B) II y III   C) I y III
   D) Solo III   E) Solo II

8. Si Jorge viaja mañana a Jujuy para promocionar sus productos, ¿a qué lugares podrían viajar Beto, José, Jimmy y Fernando respectivamente en esa misma ocasión?

   A) Tucumán, Córdoba, Formosa y San Juan.
   B) Tucumán, Formosa, Córdoba y San Juan.
   C) Córdoba, Formosa, San Juan y Tucumán.
   D) Córdoba, Tucumán, Formosa y San Juan.
   E) Córdoba, San Juan, Tucumán y Formosa.

9. Si José viaja mañana a Tucumán para promocionar sus productos, entonces es imposible que:
   I. Fernando viaje a San Juan.
   II. Beto viaje a Formosa.
   III. Jorge viaje a Jujuy.

   A) Solo I   B) Solo II   C) I y II
   D) I y III   E) Solo III

10. Para determinar a qué lugar viajarán cada uno de los promotores en la misma ocasión, basta saber que:
    I. Jorge viaja a San Juan y Beto a Formosa.
    II. José viaja a Tucumán y Fernando a Córdoba.

    A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
    B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
    C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
    D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
    E) Se necesitan más datos.

NIVEL 2

Juego lógico 3

José, Manuel, Julio, Renata, Maritza y Tina son amigos y profesionales de diferentes carreras: Arquitectura, Medicina, Ingeniería, Psicología, Sociología y Educación. Se encuentran en una fiesta de cumpleaños, en un momento en el cual los seis bailan, deciden hacer una ronda compuesta por cuatro de ellos, quedando los dos restantes en el centro de esta.

- La persona que estudia Educación está al lado de Renata en la ronda.
- En la ronda, Manuel se encuentra a la derecha de Tina y a la izquierda de la persona que estudia Medicina.
- En la ronda, la persona que estudia Psicología no se encuentra al lado de la persona que estudia Medicina.
- Maritza está bailando con la persona que estudia Arquitectura en el centro de la ronda.
- Renata se encuentra al aldo de José y al lado de la persona que estudia Ingeniería formando la ronda.

11. La persona que está bailando con Maritza es:

    A) Julio
    B) Manuel
    C) José
    D) El que estudia Economía
    E) No se puede precisar

12. Manuel estudia:

    A) Arquitectura   B) Ingeniería
    C) Sociología   D) Educación
    E) No se puede precisar

13. Renata estudia:

A) Arquitectura B) Psicología
C) Medicina D) Sociología
E) No se puede precisar

14. La persona que se encuentra a la derecha de Manuel es:

A) Tina B) José C) Renata
D) Julio E) Manuel

15. Es imposible que:
I. La fiesta de cumpleaños sea de Maritza.
II. José está al lado de Renata en la Ronda.
III. Tina está al lado de José en la ronda.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

16. En una mesa circular hay seis asientos simétricamente colocados, ante la cual se sientan seis amigos para almorzar.
Si Luis no está sentado el lado de César ni de Raúl; Pancho no está al lado de César ni de Mario, Antonio está junto y a la derecha de Pancho. Además, al frente de Antonio no se sienta Mario. ¿Quién está junto y a la derecha de Mario?

A) Pancho B) Raúl C) César
D) Mario E) Antonio

17. Cuatro amigos: Nora, Martha, Irene y Leticia se sientan alrededor de una mesa circular que tiene 5 sillas. Si sabemos que:
– Junto a Martha e Irene hay un asiento vacío.
– Leticia no se sienta junto a Irene.
Son verdaderas:
I. Martha se sienta junto a Nora.
II. Leticia se sienta junto a Nora.
III. Nora se sienta junto a Irene.

A) Todas B) I y III C) II y III
D) Solo II E) Solo I

NIVEL 3

Juego lógico 4

Un agricultor planta cinco tipos de frutas: sandía, mango, piña, fresas y duraznos. Cada año planta solo tres tipos de frutas. Se sabe que, en un año determinado:

- Si planta mango, también planta sandía.
- Si planta piña, el siguiente año no puede plantar piña.
- En cualquier año no puede repetir más de una fruta del año anterior.

18. Si planta sandía, mango y piña el primer año, ¿cuál será una combinación posible para el tercer año?

A) Sandía, mango y piña.
B) Sandía, mango y fresa.
C) Sandía, piña y durazno.
D) Sandía, fresa y durazno.
E) Piña, fresa y durazno.

19. Para tener la seguridad que dentro de veinte años plantará piña, ¿qué debe plantar necesariamente este año?

A) Sandía B) Mango C) Piña
D) Fresa E) Durazno

20. En el sexto año se proyecta plantar fresas, piña y sandía, ¿cuál es una combinación posible para el primer año?

A) Sandía, mango y piña.
B) Sandía, mango y durazno.
C) Sandía, piña y fresa.
D) Durazno, mango y fresa.
E) Piña, fresa y durazno.

21. Si el primer año planta duraznos, piña y fresas; entonces, es necesariamente cierto que:

A) El segundo año plantará durazno.
B) El segundo año plantará fresa.
C) El tercer año plantará sandía.
D) El tercer año plantará durazno.
E) El segundo año plantará mango.

22. Para tener la certeza de que siempre plantará sandía, es suficiente saber que en el primer año plantará:

I. Mango
II. Sandía

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

23. 4 amigos: Axel, Brian, Charles y Federico viven en 4 distritos.
Se sabe que:

- Brian no vive en Puente Piedra.
- Federico vive en La Molina.
- Axel va a Puente Piedra a visitar a Charles.
- A Brian le gustaría vivir en Surquillo.
- El que vive en Comas es ingeniero.

¿Quién es ingeniero?

A) Brian B) Axel C) Charles
D) Federico E) Faltan datos

24. En una excursión se encuentran 4 profesionales: un profesor, un ingeniero agrónomo, un médico y un periodista. Los nombres de ellos, aunque no en el mismo orden, son: Candy, Orlando, Mercedes y Maximiliano.
Se sabe que Candy y el ingeniero agrónomo se acaban de conocer; que Mercedes se lleva muy bien con el periodista y el médico; que Orlando es primo del médico, y que Mercedes ejerce la profesión de educación. Si Candy tiene que realizar un reportaje, indica la afirmación correcta:

I. Candy es ingeniera agrónoma.
II. Orlando no es periodista.
III. Maximiliano es médico.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) II y III E) Todas

Claves

NIVEL 1	7. D	13. C	19. C
1. C	8. B	14. C	20. D
2. B	9. D	15. E	21. E
3. D	10. C	16. C	22. D
4. E	NIVEL 2	17. C	23. A
5. B	11. A	NIVEL 3	24. D
6. C	12. B	18. A	

UNIDAD 3



Código de barras

El código de barras sirve para identificar objetos, lugares, productos de consumo, e incluso personas. Los códigos de barras se han integrado en cada aspecto de nuestras vidas, se encuentran en el supermercado, en tiendas por departamento, en farmacias, en productos electrónicos, en nuestros automóviles, en nuestras licencias de conducir, en nuestras identificaciones personales, etc. Forman parte de nuestra vida diaria.

No se requiere de gran conocimiento técnico para entenderlos, solo son una forma diferente de identificar, representar y codificar números y letras usando una combinación de barras y espacios en diferentes medidas. Solo piense en otra manera de escritura, ya que reemplazan el teclear los datos para recolectar información. En las empresas, el uso adecuado de los códigos de barras reduce la ineficiencia y mejora la productividad de la compañía dado que los errores de captura simplemente se eliminan. En forma sencilla, un código de barras es la forma más fácil, rápida y precisa de codificar información.

Matemática recreativa

Una curiosa propiedad del 123

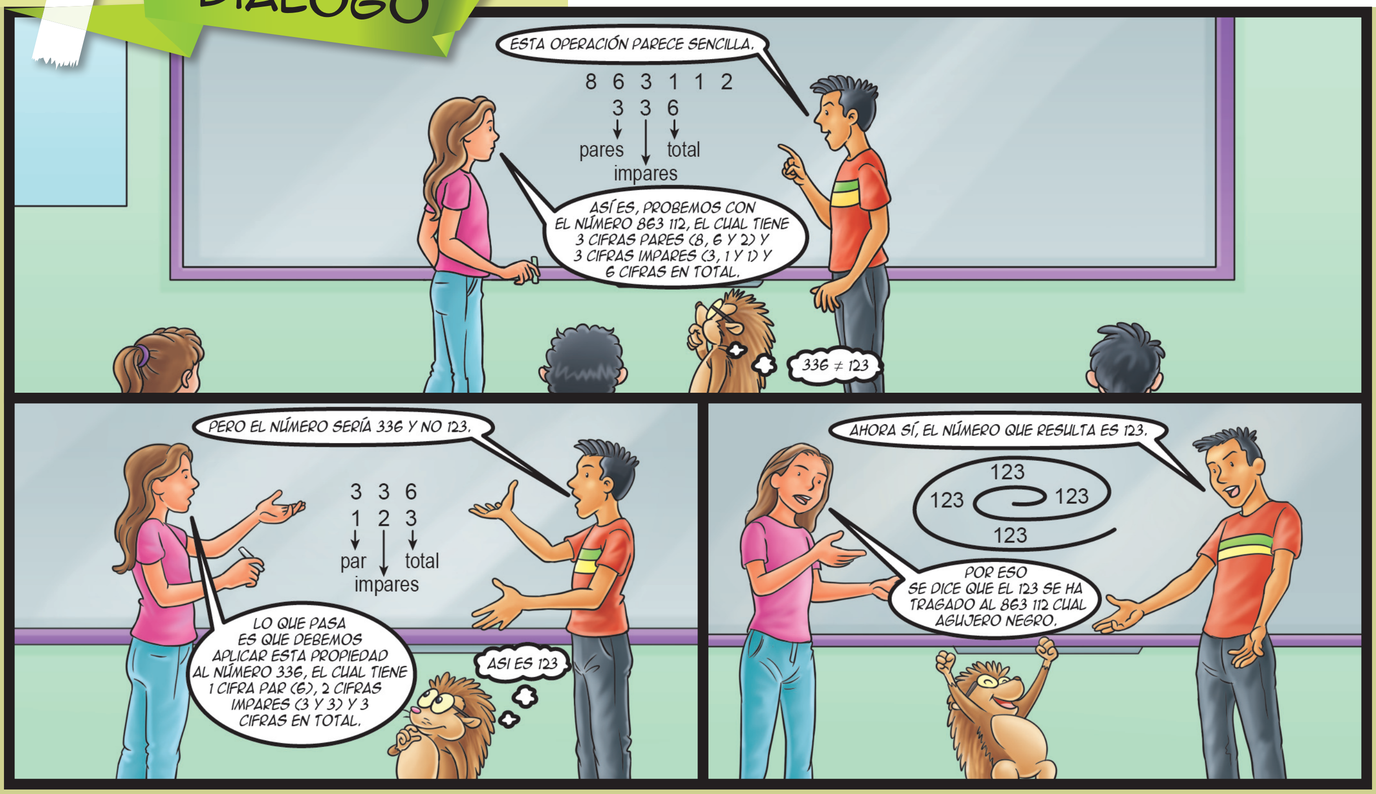
Existe una curiosa propiedad del número 123 que lo convierte en uno de esos agujeros negros numéricos y que, por qué no, podría servir para introducir a los alumnos de secundaria en el maravilloso (pero complicado) mundo de las demostraciones matemáticas.

La propiedad del 123 se refiere a lo siguiente:

Tomamos un número entero positivo cualquiera de tres o más cifras y contamos cuántas de ellas son pares y cuántas impares, y con estos datos construimos un número de la siguiente forma: colocamos primero la cantidad de cifras pares que tenía el inicial, después la cantidad de cifras impares y luego la cantidad total de cifras que tenía. Con el número obtenido hacemos lo mismo, y así sucesivamente. Sea cual sea el número inicial siempre terminaremos en el 123, y no saldremos de él.



DIÁLOGO



Sucesiones

DEFINICIÓN

Se llama sucesión, a aquel conjunto ordenado de elementos (números, letras o figuras)
Entre las sucesiones más importantes tenemos:

Atención

Existen problemas donde la razón se ubica en las segundas diferencias.
Ejemplo:

2; 5; 10; 17; 26; ...
+3 +5 +7 +9
+2 +2 +2



SUCESIONES NUMÉRICAS

Es un conjunto ordenado de números, de acuerdo a una relación y que permite determinar el número que sigue.

Sucesión aritmética

Es aquella cuya razón se determina por la diferencia de dos términos consecutivos.
Ejemplos:

- 11 ; 16 ; 21 ; 26 ; (31)
  +5 +5 +5 +5
- 23 ; 27 ; 31 ; 35 ; (39)
  +4 +4 +4 +4
- 36 ; 39 ; 42 ; 45 ; (48)
  +3 +3 +3 +3

Sucesión geométrica

Es aquella cuya razón se determina por el cociente de dos términos consecutivos.
Ejemplos:

- 4 ; 12 ; 36 ; 108 ; (324)
  ×3 ×3 ×3 ×3
- 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; (80)
  ×2 ×2 ×2 ×2
- 3 ; 15 ; 75 ; 375 ; (1875)
  ×5 ×5 ×5 ×5

Recuerda

Existen problemas donde la razón se ubica en los segundos cocientes:
Ejemplo:

3; 3; 6; 24; 192; ...
×1 ×2 ×4 ×8
×2 ×2 ×2



Sucesiones alternadas o intercaladas

Son aquellas estructuras con dos o más sucesiones en su interior.
Ejemplos:

- 1 ; 8 ; 5 ; 4 ; 9 ; 0 ; 13 ; (–4)
  +4 +4 +4
  –4 –4 –4
- 2 ; 1 ; 3 ; 1 ; 6 ; 2 ; 11 ; 6 ; (18)
  +1 +3 +5 +7
  ×1 ×2 ×3
- 2 ; 1 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; (10)
  +2 +2 +2
  +3 +3 +3

SUCESIONES ALFABÉTICAS

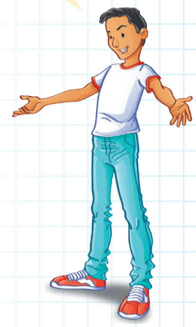
Es un conjunto de letras que se determinan a partir del orden establecido.
Ejemplos:

- D ; H ; L ; O ; (S)
  - EFG, IJK, MNÑ, PQR
- U ; R ; O ; M ; (J)
  - ST, PQ, NÑ, KL
- W ; T ; P ; N ; J ; (G)
  - UV, QRS, ÑO, KLM, HI

Atención

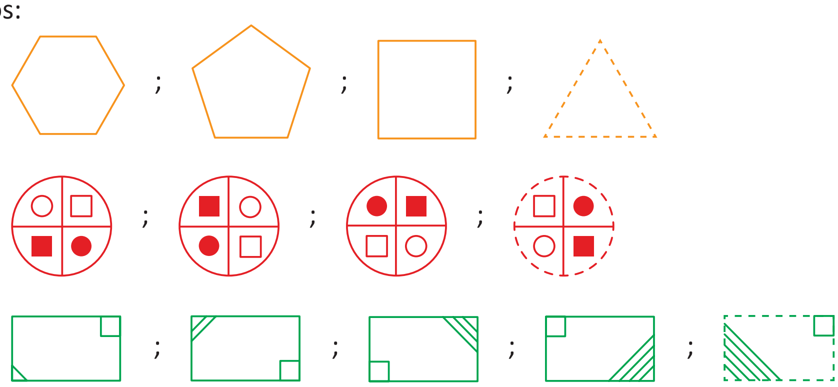
A, B, C, D, E, F, G
H, I, J, K, L, M, N
Ñ, O, P, Q, R, S, T
U, V, W, X, Y, Z

(Son las 27 letras del alfabeto que se consideran)



SUCESIONES GRÁFICAS

Es aquella sucesión que está formada por figuras ordenadas de acuerdo a ciertos criterios que determinan cada figura de la sucesión.
Ejemplos:



Observación

Desplazamiento en sentido horario y antihorario:





SUCESIONES ALFANUMÉRICAS

Es aquella sucesión que combina las sucesiones numéricas y las sucesiones alfabéticas.

- 4 ; E ; 6 ; F ; 9 ; H ; 13 ; K ; (18) ; (Ñ)
  - Números: +2, +3, +4, +5
  - Letras intermedias: G, I J, LMN
- 9 ; C ; 9 ; F ; 18 ; I ; 54 ; L ; (216) ; (Ñ)
  - Números: ×1, ×2, ×3, ×4
  - Letras intermedias: DE, GH, JK, MN
- 69 ; D ; 68 ; G ; 65 ; K ; 60 ; O ; (53) ; (U)
  - Números: −1, −3, −5, −7
  - Letras intermedias: EF, HIJ, LMNÑ, PQRST

Problemas resueltos

1 Halla el valor de x en:

2; 2; 5; 25; 32; x

Resolución:

2 ; 2 ; 5 ; 25 ; 32 ; (x)

×1 +3 ×5 +7 ×9

+2 +2 +2 +2

$\therefore x = 32 \times 9 = 288$

2 Halla x en:

1; 3; 6; 11; 19; 31; x

Resolución:

1 ; 3 ; 6 ; 11 ; 19 ; 31 ; (x)

+2 +3 +5 +8 +12 +17

+1 +2 +3 +4 +5

$\therefore x = 31 + 17 = 48$

3 Halla x en:

60; 2580; 2940; 3000; 3012; x

Resolución:

60 ; 2580 ; 2940 ; 3000 ; 3012 ; (x)

+2520 +360 +60 +12 +3

÷7 ÷6 ÷5 ÷4

$\therefore x = 3012 + 3 = 3015$

4 ¿Qué letra continua en la sucesión A; G; M; R; ...?

Resolución:

En este tipo de problemas se debe observar la cantidad de letras que existe entre dos letras consecutivas.

A ; G ; M ; R ; ( )

B C D E F → 5
H I J K L → 5
N Ñ O P Q → 5
S T U V W → 5

∴ La letra que continúa es "X".

5 ¿Qué letra continúa en la sucesión?

B; F; K; Ñ; S; ...

Resolución:

Calculamos la cantidad de letras entre dos letras consecutivas.

B ; F ; K ; Ñ ; S ; ... ( )

C D E → 3
G H I J → 4
L M N → 3
O P Q R → 4
T U V → 3

∴ La letra que continúa es "W".

6 ¿Qué letra continúa en la sucesión?

T; Ñ; J; F; C; ...

Resolución:

Veamos la cantidad de letras entre dos letras consecutivas.

T ; Ñ ; J ; F ; C ; ... ( )

O P Q R S → 5
K L M N → 4
G H I → 3
D E → 2
B → 1

∴ La letra que continúa es "A".

7 Completa la sucesión:

A; 8; E; 10; H; 14; L; 20; Ñ; 28; ...; ...

Resolución:

Como se observan letras y números debemos encontrar una relación para las letras y otra para los números.

+2 +4 +6 +8 +10

A ; 8 ; E ; 10 ; H ; 14 ; L ; 20 ; Ñ ; 28 ; ( ) ; ( )

B C D
F G
I J K
M N
O P Q

∴ La letra que sigue es "R".

El número que sigue es: 28 + 10 = 38

8 ¿Qué letra continúa en la sucesión?

A; C; F; J; L; Ñ; R; T

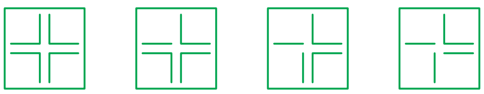
Resolución:

A ; C ; F ; J ; L ; Ñ ; R ; T ; (W)

B | D, E | G, H, I | K | M, N | O, P, Q | S | U, V
1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2

∴ La letra que continúa es "W".

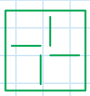
9 Determina la figura que continúa.



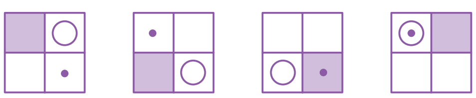
Resolución:

Observamos que se van eliminando líneas en cada figura └.

Por lo tanto, la figura que continúa es:



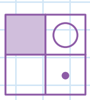
10 ¿Qué figura continúa en la sucesión?



Resolución:

La región sombreada gira en sentido antihorario y el círculo en sentido horario, mientras que el punto cambia de lugar, de esquina a esquina.

Por lo tanto, la figura que sigue es:



11 Halla el valor de "x + y" en:

3 ; 7 ; 14 ; 24 ; 37 ; x ; y

Resolución:

3 ; 7 ; 14 ; 24 ; 37 ; x ; y

4   7   10   13   16   19

3   3   3   3   3

x = 37 + 16
x = 53
y = x + 19
y = 53 +19
y = 72
∴ x + y = 53 + 72 = 125

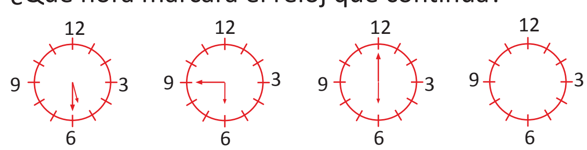
12 Indica la letra que continúa:

L ; M ; M ; J ; ...

Resolución:

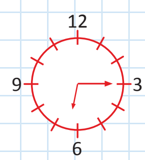
L = Lunes
M = Martes
M = Miércoles
J = Jueves
V = Viernes
∴ La letra que continúa es V.

13 ¿Qué hora marcará el reloj que continúa?



Resolución:

Observamos que cada reloj va aumentando la hora en 15 min.
El 1.° marca 5 h 30 min
El 2.° marca 5 h 45 min
El 3.° marca 6 h
⇒ el 4.° reloj marcará 6 h 15 min
∴ El reloj que continúa es:

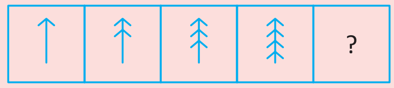


1. Halla x, en:

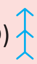
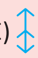
3; 5; 10; 12; 24; x

A) 32 B) 48 C) 26 D) 29 E) 25

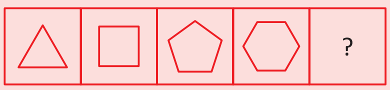
2. Indica la figura que continúa en:



A)  B)  C) 

D)  E) 

3. Indica la figura que continúa en:



A)  B)  C) 

D)  E) 

4. Halla y en la siguiente sucesión:

y; 18; 23; 28

A) 8 B) 12 C) 13 D) 6 E) 10

5. Halla x + y en la siguiente sucesión:

x; 13; 19; 25; y

A)36 B) 42 C) 32 D) 38 E) 40

6. Halla la letra que falta.

E; G; ... ; K; M

A) J B) E C) L D) I E) D

7. Halla la letra que falta:

...; E; H; K; N

A) F B) C C) A D) D E) B

8. Halla la letra que falta:

Z; W; ... ; Q; Ñ

A) T B) V C) U D) S E) X

9. Calcula el siguiente término en:

B3; D5; F7; ...

A) H10 B) I8 C) L9 D) H9 E) I10

10. Calcula el siguiente término en:

3; 10; 12; 15; 16; 20; 23; ...

A) 27 B) 25 C) 30 D) 26 E) 24

11. Halla la letra que continúa:

E; G; J; N; R; ...

A) A B) X C) Y D) W E) Z

12. Halla el siguiente término en:

2; 3; 5; 7; 11; ...

A) 13 B) 15 C) 18 D) 12 E) 16

13. Calcula el siguiente término en:

5; 8; 12; 17; 23; ...

A) 31 B) 30 C) 33 D) 34 E) 43

14. Halla el siguiente término:

1; 4, 9; 16; 25; ...

A) 27 B) 64 C) 24 D) 32 E) 36

Claves

1. C	5. D	9. D	13. B
2. C	6. D	10. B	14. E
3. E	7. E	11. B	
4. C	8. A	12. A	

Reto



Halla el término que continúa:

$\frac{6}{a^2}; \frac{3}{a}; \frac{3}{2}; \frac{3a}{4}; ...$

Rpta.: $\frac{3}{8}a^2$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla y en la siguiente sucesión:
5; 9; y; 17; 21

A) 15 B) 11 C) 12 D) 13 E) 10

2. Calcula el término que sigue en:
3; 16; 29; 42; ...

A) 49 B) 52 C) 55 D) 53 E) 50

3. Halla y en la siguiente sucesión:
2; 9; y; 23; 30

A) 17 B) 16 C) 12 D) 19 E) 13

4. Halla y – x:
x; 11; 17; 23; y

A) 27 B) 26 C) 28 D) 24 E) 25

5. Calcula el término que sigue en:
56; 43; 30, 17; ...

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

6. Halla x en la siguiente sucesión:
x; 47, 39; 31; 23

A) 53 B) 52 C) 55 D) 51 E) 50

7. Halla x – y en la siguiente sucesión:
x; 37; 30; 23; y

A) 28 B) 18 C) 25 D) 20 E) 22

8. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
A; B; C; D; ...

A) E B) H C) Ñ D) O E) P

9. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
D; F; H; J; ...

A) K B) M C) Ñ D) L E) N

10. Halla el siguiente término en:
1; 3; 6; 8; 16; 18; ...

A) 20 B) 32 C) 36 D) 40 E) 24

11. Halla el siguiente término en:
4; 7; 12; 19; ...

A) 23 B) 25 C) 27 D) 28 E) 175

12. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
C; E; H; L; ...

A) N B) P C) Ñ D) O E) Q

13. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
J; N; Q; U; Y; ...
A) B B) C C) A D) Z E) E

NIVEL 2

14. Halla el siguiente término en:
24; 23; 21; 18; 14; ...
A) 10 B) 9 C) 8 D) 11 E) 12

15. Halla el siguiente término en:
32; 64; 128; 256; ...
A) 512 B) 343 C) 729 D) 625 E) 1024

16. Halla el siguiente término en:
2; 2; 4; 12; 48; ...
A) 96 B) 240 C) 144 D) 192 E) 180

17. Halla el siguiente término en:
8; 27; 64; 125; ...
A) 180 B) 160 C) 200 D) 216 E) 175

18. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
C; F; I; L; ...
A) M B) N C) Ñ D) O E) P

19. Lo que sigue en AD; HK; ÑQ; ... es:
A) UX B) VX C) UW D) VW E) UV

20. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
B; B; C; C; C; D; D; D; ...
A) C B) D C) E D) F E) G

21. Lo que sigue en: AC; GI; MÑ; ... es:
A) RT B) RS C) ST D) TV E) SV

22. La letra que continúa en: B; G; L; P; ... es:
A) R B) S C) T D) U E) W

23. Halla x en: 4; 6; 7; 10; 10; 16; 16; 24; 25; x
A) 25 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

24. Calcula el término que sigue en:
7; 4; 11; 15; 26; ...
A) 36 B) 42 C) 40 D) 39 E) 41

25. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
A; D; I; O; X; ...
A) F B) G C) H D) I E) J

(26) Halla x en: 22; 24; 25; 28; 30; 32; x

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 40

(27) Calcula el término que sigue en:
4; 20; 10; 50; 40; 200; 190; ...

A) 830 B) 850 C) 900 D) 920 E) 950

(28) Halla x en: 128; 64; 16; 4; 2; $\frac{1}{4}$; x

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\frac{1}{4}$ E) 84

(29) La letra que sigue en AB, EF, IJ, MÑ, ... es:

A) PQ B) PO C) QR D) U E) AC

(30) Calcula el término que sigue en:
2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 38

NIVEL 3

(31) ¿Qué letra continúa en la sucesión?
S; P; N; K; H; ...

A) B B) C C) E D) F E) D

(32) Calcula el término que sigue en:
18; 9; 14; 7; 12; 6; ...

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 8

(33) Calcula el término que sigue en:
5; 6; 12; 15; 60; 65; ...

A) 280 B) 71 C) 70 D) 320 E) 390

(34) Calcula el término que sigue en:
2; 10; 5; 6; 8; 2; 11; ...

A) −2 B) 2 C) 0 D) 8 E) 4

(35) Halla x en: 1; 2; 2; 2; 4; 14; 56; x

A) 100 B) 120 C) 200 D) 248 E) 250

(36) Halla x en: −4; 0; 5; 13; 30; 74; x.

A) 160 B) 199 C) 200 D) 210 E) 260

(37) Halla x en: 16; 20; 24; 36; 96; x

A) 190 B) 310 C) 516 D) 480 E) 180

38) Calcula el término que sigue en:
2; 10; 30; 68; 130; ...

A) 232 B) 220 C) 212 D) 222 E) 192

39) Halla x en: 4; 0; 0; 5; 16; x

A) 34 B) 30 C) 28 D) 40 E) 50

40) Halla x en: −3; 0; 0; 0; 5; 22; x

A) 38 B) 58 C) 50 D) 58 E) 60

41) Halla x en: −4; 0; 0; 0; 6; 26; x

A) 48 B) 58 C) 60 D) 68 E) 70

42) Halla x en: −50; 0; 100; 190; 250; 300; x

A) 400 B) 408 C) 410 D) 420 E) 450

43) Halla x en: 12; 0; 0; 11; 33; 69; 127; x

A) 222 B) 223 C) 129 D) 160 E) 180

44) Halla x en: 6; 14; 14; 14; 32; 96; x

A) 100 B) 150 C) 180 D) 212 E) 244

45) Halla x en: 9; 13; 17; 21; 73; 269; x

A) 400 B) 500 C) 753 D) 800 E) 890

46) Halla x en: 40; 0; 0; 30; 90; 200; 410; x

A) 450 B) 600 C) 810 D) 820 E) 860

47) ¿Qué letra continúa en la sucesión?
E; F; M; A; M; ...

A) J B) G C) H D) P E) Q

48) ¿Qué letra continúa en la sucesión?
U; D; T; C; ...

A) S B) N C) C D) P E) D

Claves

NIVEL 1	13. B	25. D	37. C
1. D	**NIVEL 2**	26. C	38. D
2. C	14. B	27. E	39. A
3. B	15. A	28. D	40. E
4. D	16. B	29. A	41. E
5. E	17. D	30. C	42. A
6. C	18. C	**NIVEL 3**	43. A
7. A	19. A	31. C	44. E
8. A	20. B	32. C	45. C
9. D	21. A	33. E	46. C
10. C	22. D	34. A	47. A
11. D	23. E	35. E	48. C
12. B	24. E	36. B	

Numeración

CONCEPTO

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la correcta formación, lectura y escritura de los números.

DEFINICIONES PREVIAS

Número

Es la idea asociada a una cantidad que nos permite cuantificar los objetos de la naturaleza.

Numeral

Es la representación simbólica o figurativa del número.
Ejemplos: ||||, ≣, 4, cuatro, etc.

Cifra

Son los símbolos que convencionalmente se utilizan para la formación de los numerales, los cuales son: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Del orden

Toda cifra que forma parte de un numeral ocupa un orden determinado, el cual se considera de derecha a izquierda.
Ejemplo:

Orden ←	Cuatro	Tres	Dos	Uno	Cero
	9	6	7	5	4
Lugar →	1	2	3	4	5

De la base

Todo sistema de numeración tiene una base que es un número entero y mayor que la unidad, el cual nos indica la cantidad de unidades necesarias y suficientes de un orden cualquiera para formar una unidad del orden inmediato superior.
Ejemplo:
Expresa correctamente las siguientes numerales:

- 849_7

  Debemos agrupar de 7 en 7:

  $849_7 = 8\overset{1}{4}2_7$

  $= 852_7$

  $\therefore 849_7 = 1152_7$

- 6837_5

  Debemos agrupar de 5 en 5:

  $6837_5 = 68\overset{1}{3}2_5$

  $= 6842_5$

  $= \overset{1}{6}342_5$

  $= 7342_5$

  $\therefore 6837_5 = 12342_5$

Recuerda

¿Cuántas cifras tiene el numeral en el cual se cumple que su cifra de orden 4 coincide con su cifra de tercer lugar?

Orden ←
4 3 2 1 0
1 2 3
Lugar →

∴ El numeral tiene 7 cifras.



Atención

Toda cifra que forma parte de un numeral es un número entero no negativo y menor que la base, es decir, en base "n", se puede utilizar "n" cifras diferentes, los cuales son:

0; 1; 2; 3; ...; (n – 1)
Máxima: (n – 1)
Cifras significativas: 1; 2; 3; ...; (n – 1)



Nota

A mayor numeral aparente le corresponde menor base.

Es decir, si: $120_n = 45_k$

Como: 120 > 45

Entonces: n < k

REPRESENTACIÓN LITERAL DE LOS NÚMEROS

Cuando no se conocen las cifras de un numeral, estos se representan mediante letras teniendo en cuenta que:

- Toda expresión entre paréntesis representa una cifra.
  Ejemplo:
  Numeral de 4 cifras consecutivas en base 7 $\Rightarrow \overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}_7$
- La primera cifra de un numeral debe ser diferente de cero.
  Ejemplo:
  Numeral de 2 cifras en base 3 $\Rightarrow \overline{ab}_3 \in \{10_3; 11_3; 12_3; ...; 22_3\}$; **a** puede ser 1 o 2.
- Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes.
  Ejemplo:
  Numeral de 3 cifras en base 5 $\Rightarrow \overline{mnp}_5 \in \{100_5; 101_5; 111_5; ... ;444_5\}$

Numeral capicúa

Son aquellos numerales cuyas cifras equidistantes son iguales.
Ejemplos: 55_7; 353_5; $\overline{xyyx}_8$; $\overline{mnppnm}_k$

Descomposición polinómica

Ejemplos:

- **Descomposición simple:**
  $4352 = 4 \times 10^3 + 3 \times 10^3 + 5 \times 10 + 2$
  $20645_8 = 2 \times 8^4 + 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 2$
  $\overline{abcd}_k = ak^3 + b \times k^2 + ck + d$
- **Descomposición por bloques:**
  $4352 = 43 \times 10^2 + 52$
  $\overline{abab}_n = \overline{ab}_n \times n^2 + \overline{ab}_n$
  $\overline{mnpmnp}_k = \overline{mnp}_k \times k^3 + \overline{mnp}_k$

Cambio de base

- **De base "m" a base 10.**
  Ejemplo:
  Expresa 524_6 a base 10:
  $524_6 = 5 \times 6^2 + 2 \times 6 + 4 = 196$
- **De base 10 a base "n".**
  Ejemplo:
  Expresa 196 en base:

```
1 9 6 |6
1 9 2   3 2 |6
   (4)  3 0  (5)
            (2)
```

$\therefore 196 = 524_6$

Numeral de cifras máximas

- $9 = 10 - 1$
  $99 = 10^2 - 1$
  $999 = 10^3 - 1$
- $7_8 = 8 - 1$
  $77_8 = 8^2 - 1$
  $777_8 = 8^3 - 1$

En general:

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ ...\ (n-1)}_n}_{\text{"k" cifras}} = n^k - 1$$

Bases sucesivas

- $\overline{1c}_n = n + c$
- $\overline{1b}_{\overline{1c}_n} = n + c + b$
- $\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_n}} = n + c + b + a$

En general:

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\overline{1d}_{\cdot_{\cdot_{\overline{1x}_n}}}}}} = n + x + ... + d + c + b + a$$



Recuerda

Por convención, cuando la cifra es mayor que 9 se utilizan letras para su representación:

(10) < > A
(11) < > B
(12) < > C

Nota

De manera práctica se multiplica cada cifra del numeral por la base elevada al orden cada cifra.

Observación

En el 1.er caso de cambio de base también se puede usar el método de Ruffini, así:

	5	2	4
6	↓	30	192
	5	32	196

$\therefore 524_6 = 196$



Nota

Ejemplo de numeral de cifras máximas
Expresa N en base 8:
$N = \underbrace{111\ ...\ 11}_{75 \text{ cifras}}{}_2$
$N = 2^{75} - 1 = (2^3)^{25} - 1$
$= 8^{25} - 1$
$N = \underbrace{777\ ...\ 77}_{25 \text{ cifras}}{}_8$

Nota

Ejemplo de bases sucesivas
Calcula "n", si:

$\left.\begin{matrix}17_{17_{\cdot_{\cdot_{17_n}}}}\end{matrix}\right\}$ 12 numerales $= 104$

$n + 12(7) = 104$
$n + 84 = 104$
$n = 20$

Problemas resueltos

1 Si: $\overline{23a}_9 = \overline{27b}_n = \overline{36a}_p$; calcula:
$E = b - a + n + p$

Resolución:

Comparando, sabemos que a mayor numeral aparente le corresponde menor base y viceversa.

- $\overset{-}{\overline{23a}}_{\underset{+}{9}} = \overset{+}{\overline{27b}}_{\underset{-}{n}}$

  $7 < n < 9 \Rightarrow n = 8$

- $\overset{-}{\overline{27b}}_{\underset{+}{8}} = \overset{+}{\overline{36a}}_{\underset{-}{9}}$

  $6 < p < 8 \Rightarrow p = 7$

Luego: $\overline{23a}_9 = \overline{27b}_8$

Descomponiendo polinómicamente:

$2.9^2 + 3.9 + a = 2.8^2 + 7.8 + b$

$162 + 27 + a = 128 + 56 + b$

$34 + a = 29 + b$

$5 = b - a$

Finalmente: $E = b - a + n + p$

$E = 5 + 8 + 7$

$\therefore E = 20$

2 Indica la suma de valores de "a" que verifican:

$\overline{aaa}_7 = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente:

$a.7^2 + a.7 + a = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$; $a = \overset{\circ}{2}$; $a < 5$

$49a + 7a + a = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$

$57 \times a = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$

a	$\overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$
2	114
4	228

$\therefore$ Suma de valores $= 2 + 4 = 6$

3 Si: $\overline{abc}_7 = \overline{cba}_9$; halla: $a + b + c$

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente:

$a.7^2 + b.7 + c = c.9^2 + b.9 + a$

$49a + 7b + c = 81c + 9b + a$

$48a = 2b + 80c$

$24a = b + 40c$

$a = 5$, $b = 0$, $c = 3$

$\therefore a + b + c = 8$

4 Halla: N
si: $554_{N+2} = 444_{N+3}$

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente:

$5.(N+2)^2 + 5(N+2) + 4 = 4(N+3)^2 + 4(N+3) + 4$

$5(N^2 + 4N + 4) + 5N + 10 + 4 = 4(N^2 + 6N + 9) + 4N + 12 + 4$

$5N^2 + 20N + 20 + 5N + 14 = 4N^2 + 24N + 36 + 4N + 16$

$N^2 = 3n + 18$

$N^2 - 3N - 18 = 0$

$N \quad -6$

$N \quad +3$

$(N - 6)(N + 3) = 0$

$\therefore N = 6$

5 Halla $a + b$, si: $\overline{ab4}_{\overline{ab}} = 212$

Resolución:

Descomponiendo por bloques:

$\overline{ab}_{\overline{ab}} \times \overline{ab} + 4 = 212$

$\overline{ab}_{\overline{ab}} \times \overline{ab} = 208$

$\overline{ab}_{\overline{ab}} \times \overline{ab} = 16 \times 13$

$\overline{ab} = 13$

$\Rightarrow a = 1; b = 3$

$\therefore a + b = 4$

6 Calcula a + b + n; si $\overline{abab}_n = 600$.

Resolución:

Descomponiendo por bloques:

$\overline{ab}_n \times n^2 + \overline{ab} = 12 \times 50$

$\overline{ab}_n (n^2 + 1) = 12 \times 50$

$n^2 + 1 = 50 \;\wedge\; \overline{ab}_n = 12$

$\Rightarrow n = 7$

Luego: $\overline{ab}_7 = 12$

$\overline{ab}_7 = 15_7$

$\Rightarrow a = 1; b = 5$

$\therefore a + b + n = 13$

7 Calcula "a", si:

$$\underbrace{13_{13_{13_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{13_{\overline{aa}}}}}}}}}_{\text{"a" veces}} = 98$$

Resolución:

Aplicando bases sucesivas:

$3a + \overline{aa} = 98$

$3a + 10a + a = 98$

$14a = 98$

$\therefore a = 7$

8 ¿En cuántos sistemas de numeración el número 1234 se escribe con 3 cifras?

Resolución:

Del enunciado:

$1234 = \overline{abc}_n$

Además: $100_n < \overline{abc}_n < 1000_n$

$n^2 < 1234 < n^3$

$n \in \underbrace{\{11; 12; 13; ...; 34; 35\}}_{25 \text{ valores}}$

$\therefore$ 25 sistemas.

9 Si se cumple que:

$\overline{a111bc}_n = \overline{3(2a)7}_{n^2}$

Calcula: a + b + c

Resolución:

Vamos a utilizar el caso especial de cambio de base (de base n a base n^k).

En este caso k = 2

$\overline{a11bc}_n = \overline{3(2a)7}_{n^2}$

- $a = 3$

  $11_n = 2a$

  $n + 1 = 2(3)$

  $n = 5$

- $\overline{bc}_n = 7$

  $\overline{bc}_5 = 7$

  $\overline{bc}_5 = 12_5$

$\Rightarrow b = 1; c = 2$

$\therefore a + b + c = 6$

10 Expresa el numeral:

$E = \underbrace{333 ... 32_{(4)}}_{30 \text{ cifras}}$

en base 8 y da la suma de sus cifras.

Resolución:

Sumando 1 a ambos lados de la igualdad:

$E + 1 = \underbrace{333 ... 33_{(4)}}_{30 \text{ cifras}}$

$E + 1 = 4^{30} - 1$

$E + 1 = (2^2)^{30} - 1$

$E + 1 = (2^3)^{20} - 1$

$E + 1 = 8^{20} - 1$

$E + 1 = \underbrace{777 ... 77_{(8)}}_{20 \text{ cifras}}$

$E = \underbrace{777 ... 76_{(8)}}_{20 \text{ cifras}}$

$\therefore$ Suma de cifras = 7(19) + 6 = 139

Actividades de razonamiento

1. Cierto día se reparte $\overline{ab}$ kg de harina, y al día siguiente $\overline{ac}$ kg. Si en total se tiene $\overline{cba}$ kg, ¿cuántos kg se tienen en total?

A) 439 kg B) 189 kg C) 362 kg D) 137 kg E) 236 kg

2. ¿En qué sistema se realizó la operación, $63 + 15 = 111$?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 7 E) 11

3. Calcula: $x + y$

Si: $\overline{aaaa}_5 = \overline{xy8}$

A) 12 B) 6 C) 10 D) 9 E) 8

4. Halla: $a + b + c$

Si: $\overline{(c+2b)(4)(3c)(b+a)(a)}$, es capicúa.

A) 7 B) 5 C) 8 D) 9 E) 6

5. Si los siguientes numerales están correctamente escritos:

$$\overline{12c}_5;\ \overline{10b}_a;\ \overline{21a}_c;\ \overline{xxx}_b$$

Calcula: $a + b + c + x$

A) 15 B) 12 C) 8 D) 6 E) 10

6. Halla: $x + n$

Si: $\overline{xx}_n + \overline{xx}_{n+1} + \overline{xx}_{n+2} = 105$

A) 32 B) 37 C) 40 D) 34 E) 135

7. Halla: $x + y + a$

Si: $\overline{xy3}_a = \overline{yxa}_5$

A) 8 B) 5 C) 7 D) 9 E) 6

8. Se tiene que:

$$\overline{\left(\frac{9}{m}\right)\left(\frac{6}{m}\right)\left(\frac{15}{m}\right)}_7 = \overline{(m-1)(m-1)(m-2)(m-1)}_n$$

Halla: $m + n$

A) 7 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

9. Si: $\overline{xyxy}_n = 286$

calcula: $x + y + n$

A) 12 B) 8 C) 7 D) 6 E) 10

10. Si: $\overline{(a-3)(5-a)(2a+1)} = \overline{aba}_n$, determina:

$$H = \overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{\overline{1a}_n}}}}}}$$

"b.n" veces

A) 45 B) 70 C) 65 D) 55 E) 60

11. El mayor número de 3 cifras en base "b" es llevado a la base "b + 1". Da como respuesta la suma de cifras en esta nueva base.

A) 3b + 1 B) 3b – 1 C) 3b
D) 2b – 1 E) 2b + 1

12. Se tiene que: $\overline{x0x0x}_n = \overline{xxx}_m$, halla la razón entre m y n^2.

A) 1 B) m C) m + 1 D) 3 E) n + 1

13. Halla el valor de "S", si:

$$S = 1010_2 + 1010_4 + 1010_6 + ... + 1010_{16}$$

A) 14 830 B) 12 320 C) 9740
D) 10 440 E) 11 304

14. Calcula "a + n", sabiendo que:

$$\overline{1(n-1)}_{\overline{1(n-2)}_{\overline{1(n-3)}_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{13_{12_{11_n}}}}}}}}$$

A) 48 B) 36 C) 32 D) 44 E) 42

Claves

1. B	5. E	9. B	13. D
2. D	6. D	10. C	14. E
3. C	7. C	11. D	
4. B	8. A	12. A	

Reto



¿Qué valor debe tomar "a", para que al convertir el numeral $N = \underbrace{\overline{44...44a}}_{42\ cifras}{}_{(7)}$ al sistema decimal, este termine en cifra 3?

Rpta.: 5

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si: $\overline{aaa}_7 = 291_{11}$
halla: a

A) 2 B) 5 C) 6 D) 3 E) 4

2. Dada la igualdad: $\overline{abba}_7 = 914_{12}$
Halla: "a . b"

A) 16 B) 18 C) 12 D) 14 E) 15

3. Halla: a + n
Si: $\overline{4n2}_8 = \overline{6a6}_n$

A) 10 B) 6 C) 7 D) 9 E) 8

4. Halla el valor de "x", si se cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{xxxx}_8 = 1023_{12}$$

A) 7 B) 4 C) 6 D) 3 E) 5

5. Halla la representación decimal (base 10) del numeral: $\overline{(a-2)(a)(a+4)}_8$

A) 87 B) 78 C) 95 D) 93 E) 103

6. ¿Cuál es el número comprendido entre 200 y 300, tal que, leído al revés, es el doble del número que sigue al original?

A) 290 B) 295 C) 238 D) 285 E) 270

7. Si el número 118 (en base 10) se escribe 433 en base x, entonces x es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 8

8. Calcula el valor de "a + b", si se cumple que:
$\overline{abbb}_6 = \overline{5ba}_8$

A) 5 B) 8 C) 4 D) 10 E) 6

9. En un sistema de base x se tiene: 63 – 27 = 35. La base "x" es igual a:

A) 5 B) 9 C) 8 D) 6 E) 7

10. Si: $\overline{3(2a)}_7 = \overline{4a}_n$; el valor de (a + n) es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 8

NIVEL 2

11. Si: $\overline{mam}_5$ se expresa en el sistema binario, ¿cuántas cifras tendría, si en base "a" se escribe como $\overline{x3x}$?

A) 7 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

12. Si al número $\overline{abcde}$ se le agrega un 3 a la derecha y a continuación se le multiplica por 2, nos da como resultado el número $\overline{abcde}$ con un 2 a la izquierda.

Halla: $a + b + c + d + e$

A) 9 B) 15 C) 13 D) 10 E) 14

13. Si: $\overline{ab5ba}_n = 6616_7$; Halla el valor de: $a + b + n$

A) 8 B) 11 C) 14 D) 10 E) 17

14. Juan quiere saber cuánto dinero tiene ahorrado su padre. Este le dice: Tengo S/. $\overline{abba}$, donde el cuadrado de $\overline{ab}$ menos el cuadrado de $\overline{ba}$ es un cuadrado perfecto". ¿Cuánto tiene ahorrado el padre de Juan?

A) S/.2442 B) S/.7447 C) S/.3883
D) S/.3223 E) S/.6556

15. Si: $(\overline{a8})^2 = \overline{a(b+2)0b}$; halla la suma de cifras de (a.b).

A) 6 B) 7 C) 9 D) 8 E) 4

16. El menor numeral de 4 cifras de base "n" se escribe como $\overline{2ab}$ en el sistema decimal. Halla $a + b + n$.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 13 E) 12

17. Calcula $a + b + c$, si los siguientes numerales están correctamente escritos $\overline{12a}_4$; $\overline{1bc}_a$; $\overline{bb0}_c$.

A) 4 B) 8 C) 6 D) 5 B) 8

18. Si a, b y c son cifras diferentes, halla "m + p".

$$\overline{aaa}_2 + \overline{bbb}_3 + \overline{cc}_4 = \overline{mp}$$

A) 9 B) 8 C) 10 D) 6 E) 12

19. Calcula "a", si se cumple:

$\overline{(a-1)(a-1)(a-1)(a-1)}_a = 1295$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 5 E) 7

20. Si se cumple que: $\overline{35b}_n = 262_7$

Halla: $b + n$

A) 8 B) 9 C) 12 D) 10 E) 11

NIVEL 3

21. Sabiendo que: $\overline{aba}_6 = \overline{a(2b)(2b)}_5$; halla: $a + b$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

22. Sabiendo que: $\overline{a75}_n = \overline{a30}_9$; halla: $a + n$

A) 9 B) 7 C) 8 D) 11 E) 10

23) Sabiendo que:

$$14_{14_{14_{14_n}}} = 25$$

Halla: "n"

A) 9 B) 8 C) 5 D) 7 E) 6

24) Calcula el máximo valor de "n" en: $\overline{ab}_n = \overline{ba}_8$

A) 7 B) 16 C) 50 D) 25 E) 21

25) Si se sabe que:

$\overline{a0a0a}_x = \overline{aaa}_{y^2}$. Halla la razón entre "y" y "x".

A) 1 B) 0,5 E) x D) 2 E) y

26) Calcula "n", si se cumple que:

$$24_{19_{19_{19_{\cdot^{\cdot^{\cdot^{19_n}}}}}}} = 558_9$$

(24 veces)

A) 13 B) 10 C) 14 D) 11 E) 12

27) ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética?

$$42_n; 47_n; 53_n; \ldots ; 157_n$$

A) 30 B) 20 C) 25 D) 15 E) 18

28) Halla el mayor valor posible que puede tomar "a", si:

$$\overline{a1a}_b = \overline{ab}$$

A) 6 b) 4 C) 2 D) 5 E) 3

29) Al escribir el numeral 1464_n a la base "n + 1", ¿cuál es la suma de cifras?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 2n + 3 E) n – 2

30) Si: $\overline{xy}_n = \overline{yx}_{n+2}$, siendo "n" un número impar.

Halla el valor de (x – y).

A) 4 B) 1 C) 3 D) 5 E) 2

Claves

NIVEL 1	9. B	17. C	25. A
1. C	10. D	18. E	26. D
2. E	**NIVEL 2**	19. A	27. B
3. D	11. D	20. D	28. C
4. D	12. E	**NIVEL 3**	29. C
5. C	13. B	21. B	30. B
6. B	14. E	22. E	
7. A	15. C	23. A	
8. C	16. D	24. C	

Analogías y distribuciones numéricas

DEFINICIÓN

Es un conjunto de problemas, en los cuales se relacionan los números por medio de operaciones simples. Resolver este tipo de problemas consistirá en descubrir una relación para aplicarla en otro grupo de números.
Ejemplos:

1. Halla el número que falta.

21	(17)	10
36	(25)	13
54	( )	20

Resolución:
Debemos realizar operaciones con los extremos para obtener el número central.

1.ª fila: $\frac{21}{3} + 10 = 17$

2.ª fila: $\frac{36}{3} + 13 = 25$

3.ª fila: $\frac{54}{3} + 20 = 38$

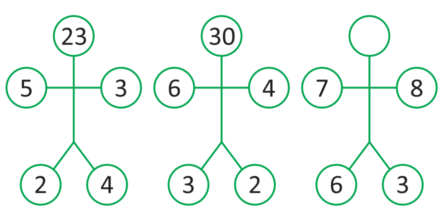
∴ El número que falta es 38.

2. ¿Qué número falta?

11	4	7
9	8	5
6	13	?

Resolución:
Veamos la relación numérica en las filas.
1.ª fila: $11 + 4 + 7 = 22$
2.ª fila: $9 + 8 + 5 = 22$
3.ª fila: $6 + 13 + ? = 22$
$19 + ? = 22 \Rightarrow ? = 3$
∴ El número que falta es 3.

3. Halla el número que falta.



Resolución:
Debemos encontrar una relación entre las manos y los pies para que resulte la cabeza.
1.ª figura: $(5 \times 3) + (2 \times 4) = 23$
2.ª figura: $(6 \times 4) + (3 \times 2) = 30$
3.ª figura: $(7 \times 8) + (6 \times 3) = 74$
∴ El número que falta es 74.

Atención

En las analogías numéricas la relación nunca es vertical:

	9	(14)	5	
+3	12	(20)	8	+3
+4	16	( )	12	+4

La relación siempre es horizontal:

(+)
9 (14) 5

(+)
12 (20) 8

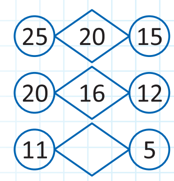
(+)
16 (28) 12



Nota

En muchos casos las analogías pueden no presentar respuesta entre las alternativas. En este caso se debe buscar otra relación.

Ejemplo:
¿Qué número falta?



A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 15

Resolvemos:
$(25 + 15) \div 2 = 20$
$(20 + 12) \div 2 = 16$
$(11 + 5) \div 2 = 8$

8 no es la respuesta, pues no está entre las alternativas.

Analizamos:
$(25 - 15)\, 2 = 20$
$(20 - 12)\, 2 = 16$
$(11 - 5)\, 2 = 12$

12 sí es la respuesta, pues está entre las alternativas.

Problemas resueltos

1 ¿Qué número falta?

18	(13)	7
24	(17)	9
39	( )	12

Resolución:

1.ª fila: $\frac{18}{3} + 7 = 13$

2.ª fila: $\frac{24}{3} + 9 = 17$

3.ª fila: $\frac{39}{3} + 12 = 25$

$\therefore$ El número que falta es 25.

2 ¿Qué número falta?

5	(9)	32
8	(12)	44
13	( )	55

Resolución:

1.ª fila: $\frac{32-5}{3} = 9$

2.ª fila: $\frac{44-8}{3} = 12$

3.ª fila: $\frac{55-13}{3} = 14$

$\therefore$ El número que falta es 14.

3 Halla el número que falta.

9	(25)	4
11	(36)	5
13	( )	4

Resolución:

1.ª fila: $(9-4)^2 = 25$

2.ª fila: $(11-5)^2 = 36$

3.ª fila: $(13-4)^2 = 81$

$\therefore$ El número que falta es 81.

4 Halla el número que falta.

5	(41)	6
8	(33)	5
9	( )	11

Resolución:

1.ª fila: $5 + 6^2 = 41$

2.ª fila: $8 + 5^2 = 33$

3.ª fila: $9 + 11^2 = 130$

$\therefore$ El número que falta es 130.

5 ¿Qué número falta?

24	(3)	15
38	(4)	22
56	( )	31

Resolución:

1.ª fila: $\sqrt{24-15} = 3$

2.ª fila: $\sqrt{38-22} = 4$

3.ª fila: $\sqrt{56-31} = 5$

$\therefore$ El número que falta es 5.

6 ¿Qué número falta?

8	(13)	25
7	(15)	64
15	( )	100

Resolución:

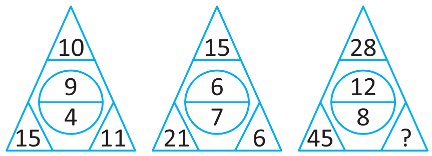
1.ª fila: $8 + \sqrt{25} = 13$

2.ª fila: $7 + \sqrt{64} = 15$

3.ª fila: $15 + \sqrt{100} = 25$

$\therefore$ El número que falta es 25.

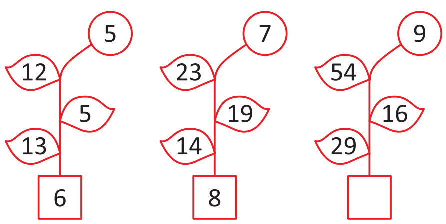
7 ¿Qué número falta?



Resolución:

1.ª figura: $10 + 15 + 11 = 9 \times 4$
36
2.ª figura: $15 + 21 + 6 = 6 \times 7$
42
3.ª figura: $28 + 45 + ? = 12 \times 8$
$73 + ? = 96 \Rightarrow ? = 23$
$\therefore$ El número que falta es 23.

8 ¿Qué número falta?



Resolución:

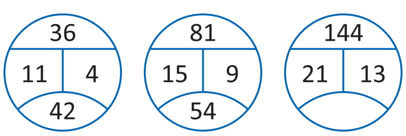
1.ª figura: $\dfrac{12+5+13}{5} = 6$

2.ª figura: $\dfrac{23+19+14}{7} = 8$

3.ª figura: $\dfrac{54+16+29}{9} = 11$

$\therefore$ El número que falta es 11.

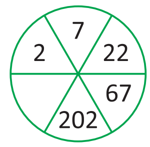
9 ¿Qué número falta?



Resolución:

1.ª figura: $\sqrt{36}\ (11 - 4) = 42$
2.ª figura: $\sqrt{81}\ (15 - 9) = 54$
3.ª figura: $\sqrt{144}\ (21 - 13) = 96$
$\therefore$ El número que falta es 96.

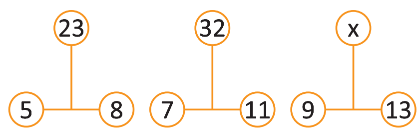
10 ¿Qué número falta?



Resolución:

$2 \times 3 + 1 = 7$
$7 \times 3 + 1 = 22$
$22 \times 3 + 1 = 67$
$67 \times 3 + 1 = 202$
$202 \times 3 + 1 = 607$
$\therefore$ El número que falta es 607.

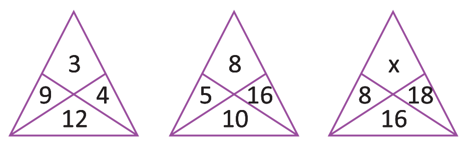
11 Halla x en:



Resolución:

1.ª figura: $5(3) + 8 = 23$
2.ª figura: $7(3) + 11 = 32$
3.ª figura: $9(3) + 13 = 40$
$\therefore x = 40$

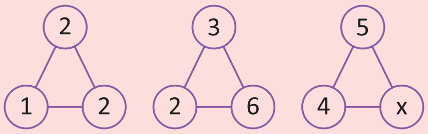
12 Halla x en:



Resolución:

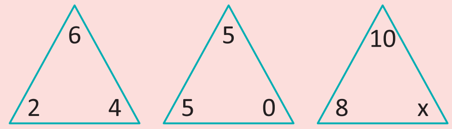
1.ª figura: $9 . 4 = 3 . 12$
2.ª figura: $5 . 16 = 8 . 10$
3.ª figura: $8 . 18 = 16 . x$
$144 = 16x$
$x = 9$

1. Halla x.



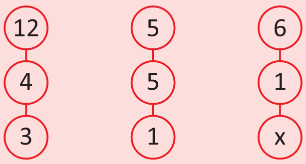
A) 10 B) 8 C) 9 D) 12 E) 20

2. Halla x.



A) 8 B) 2 C) 4 D) 0 E) 6

3. Halla x.



A) 4 B) 10 C) 6 D) 12 E) 8

4. Halla x.

4	3
8	1

1	0
2	1

3	2
x	4

A) 9 B) 8 C) 14 D) 2 E) 12

5. Halla el valor de x en:

4 (4) 1
3 (9) 2
2 (x) 3

A) 5 B) 7 C) 8 D) 6 E) 12

6. Halla el valor de x en:

6 (5) 4
3 (2) 1
8 (x) 4

A) 4 B) 8 C) 12 D) 6 E) 10

7. Halla el valor de x en:

7 (4) 5
10 (10) 6
4 (x) 1

A) 12 B) 6 C) 10 D) 4 E) 8

8. Halla el valor de x en:

4 (11) 3
3 (14) 5
5 (x) 4

A) 19 B) 20 C) 15 D) 12 E) 12

9. Halla el valor de x en:

16 (8) 8
13 (5) 2
2 (x) 1

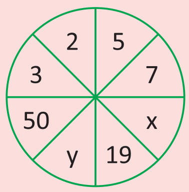
A) 6 B) 5 C) 1 D) 8 E) 3

10. Halla el valor de x en:

10 (4) 3
12 (4) 4
7 (x) 1

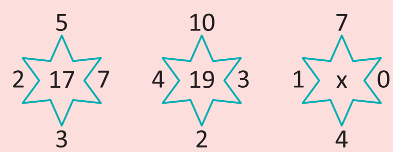
A) 10 B) 12 C) 8 D) 5 E) 6

11. Halla x + y.



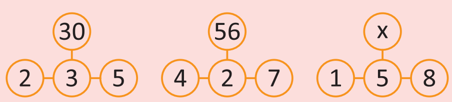
A) 43 B) 40 C) 34 D) 48 E) 50

12. Halla x.



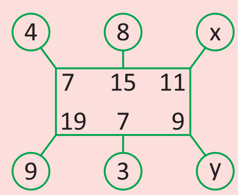
A) 7 B) 8 C) 12 D) 13 E) 15

13. Halla x.



A) 52 B) 40 C) 35 D) 42 E) 30

14. Halla x + y.



A) 11 B) 10 C) 12 D) 9 E) 8

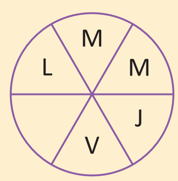
Claves

1. E
2. B
3. C
4. A
5. C
6. D
7. B
8. A
9. C
10. D
11. A
12. C
13. B
14. B

Reto



Halla la letra que va en el espacio vacío.



Rpta.: S

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla x.

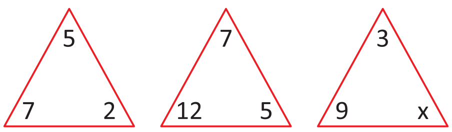
7	6	42

5	6	30

4	3	x

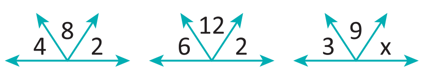
A) 10 B) 15 C) 22 D) 12 E) 18

2. Halla x.



A) 2 B) 8 C) 10 D) 5 E) 6

3. Halla x.



A) 11 B) 3 C) 7 D) 8 E) 4

4. Halla x.

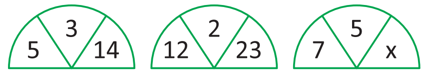
2	3
4	6

7	2
5	1

8	3
3	x

A) 5 B) 2 C) 1 D) 3 E) 4

5. Halla x.



A) 34 B) 25 C) 28 D) 30 E) 18

6. Halla x.

12	(10)	8
7	(8)	9
4	(x)	6

A) 6 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

7. Halla x.

5	(4)	3
7	(6)	4
10	(x)	5

A) 12 B) 10 C) 8 D) 9 E) 6

8. Halla x.

14	(3)	8
17	(6)	5
23	(x)	3

A) 5 B) 8 C) 7 D) 12 E) 10

9. Halla x.

7 (20) 3
12 (34) 5
3 (x) 1

A) 5 B) 6 C) 10 D) 8 E) 12

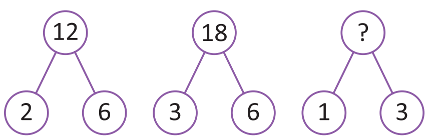
10. Halla x.

8 (20) 3
7 (8) 5
9 (x) 2

A) 32 B) 20 C) 28 D) 12 E) 16

NIVEL 2

11. ¿Qué número falta?



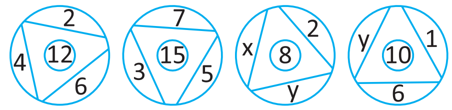
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

12. Calcula el valor de z.

6 (24) 42
3 (15) 27
17 (z) 5

A) 11 B) 10 C) 15 D) 16 E) 14

13. Halla x + y.



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Halla n.

4 6 7
2 8 5
8 48 n

A) 24 B) 35 C) 32 D) 20 E) 42

15. Halla x.

3 4 13
6 8 49
6 3 x

A) 19 B) 16 C) 24 D) 25 E) 23

16. Halla x.

2 (18) 6
4 (15) 3
7 (x) 1

A) 12 B) 8 C) 14 D) 9 E) 10

17. Halla x.

4	(10)	3
6	(4)	1
5	(x)	4

A) 12 B) 20 C) 16 D) 18 E) 15

18. Halla x.

5	(22)	3
4	(11)	5
6	(x)	3

A) 28 B) 25 C) 30 D) 20 E) 33

19. Halla x.

4	(9)	3
7	(30)	5
5	(x)	2

A) 12 B) 7 C) 8 D) 10 E) 6

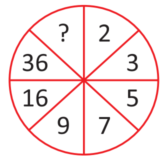
20. Halla x.

7	(2)	3
4	(3)	5
8	(x)	2

A) 10 B) 6 C) 2 D) 8 E) 4

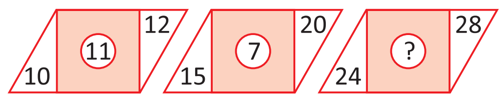
NIVEL 3

21. Halla el número que falta.



A) 64 B) 81 C) 49 D) 72 E) 100

22. Encuentra el término que falta.



A) 13 B) 10 C) 15 D) 20 E) 16

23.

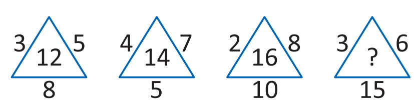
1	8
5	2

−3	−20
−8	−9

5	x
9	10

A) 10 B) 60 C) 75 D) 24 E) 5

24. ¿Cuál es el número que falta?



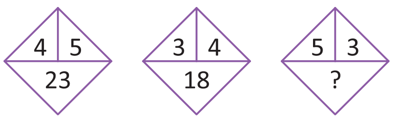
A) 24 B) 18 C) 27 D) 21 E) 26

25. Halla x.

16 (12) 4
20 (28) 18
24 (x) 7

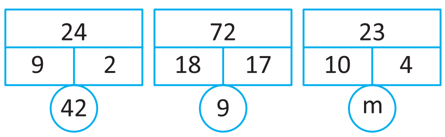
A) 19 B) 20 C) 21 D) 23 E) 30

26. Encuentra el valor que falta.



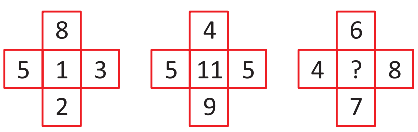
A) 21 B) 20 C) 23 D) 18 E) 19

27. Halla m.



A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

28. ¿Qué número falta?



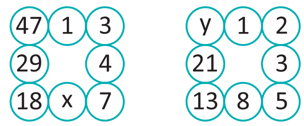
A) 8 B) 9 C) 11 D) 10 E) 12

29. Halla x.

21 4 12
20 8 16
22 5 x

A) 20 B) 28 C) 30 D) 31 E) 38

30. Halla el valor de: x + y



A) 34 B) 11 C) 44 D) 45 E) 54

Claves

NIVEL 1	9. D	17. D	25. A
1. D	10. C	18. E	26. E
2. E	NIVEL 2	19. C	27. C
3. B	11. E	20. C	28. D
4. C	12. A	NIVEL 3	29. A
5. A	13. E	21. A	30. D
6. C	14. B	22. A	
7. B	15. A	23. D	
8. E	16. B	24. C	

Leyes de exponentes

DEFINICIÓN

Son aquellas definiciones, teoremas y notas referidas a las operaciones de potenciación y radicación.

Recuerda

Ejemplos:

$2^4 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 16$

$3^6 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 729$

$5^5 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 3125$

POTENCIACIÓN

Es una operación en la cual el exponente indica el número de veces que se va a multiplicar la base.

$$b^n = P$$

Exponente: n; Base: b; Potencia: P



Definiciones

Exponente natural

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{n \text{ veces}} \quad ; n \in \mathbb{Z}^+$$

Exponente cero

$$b^0 = 1 \quad ; b \neq 0$$

Atención

0^0 = indeterminado

$\frac{0}{0}$ = indeterminado

$\frac{N}{0}$ = no existe

$\frac{0}{N} = 0;\ N \neq 0$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; a \neq 0$$

Teoremas

1. Multiplicación de bases iguales

$$b^m \,.\, b^n = b^{m+n}$$

Ejemplos:

$x^6 \,.\, x^{11} = x^{6+11} = x^{17}$

$a^{18} \,.\, a^{25} = a^{18+25} = a^{43}$

$m^5 \,.\, m^7 \,.\, m^9 = m^{5+7+9} = m^{21}$

2. División de bases iguales

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \quad ; b \neq 0$$

Ejemplos:

$\frac{x^{15}}{x^6} = x^{15-6} = x^9$

$\frac{a^{28}}{a^{13}} = a^{28-13} = a^{15}$

$\frac{x^7}{x^{11}} = x^{7-11} = x^{-4}$

3. Potencia de una multiplicación

$$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$$

Ejemplos:

$(2 \,.\, x)^3 = 2^3 \,.\, x^3 = 8x^3$

$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \,.\, \sqrt{2}^2 = 9 \,.\, 2 = 18$

$(2\sqrt[3]{3})^3 = 2^3 \,.\, \sqrt[3]{3}^3 = 8 \,.\, 3 = 24$

4. Potencia de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ; b \neq 0$$

Ejemplos:

$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$

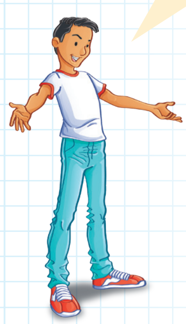
$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}^2}{3^2} = \frac{2}{9}$

$\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt[3]{3}^3}{4^3} = \frac{3}{64}$

Observación

Propiedades:

- $(a^m)^n = (a^n)^m$
- $\left(\frac{1}{a}\right)^m = a^{-m}$
- $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^{-p} = \left(\frac{b^{np}}{a^{mp}}\right)$



5. Potencia elevada a un exponente

$$(a^m)^n = a^{m\,.\,n}$$

Ejemplos:

$(x^2)^5 = x^{2\,.\,5} = x^{10}$

$[(a^2)^3]^5 = a^{2.\,3.\,5} = a^{30}$

$[(m^5)^7]^9 = m^{5.\,7.\,9} = m^{315}$

6. Exponentes sucesivos

$$a^{b^{c^{d^{e}}}} = a^{b^{c^{x}}} = a^{b^{y}} = a^{z}$$

($d^e \rightarrow x$; $c^x \rightarrow y$; $b^y \rightarrow z$)

Ejemplos:

$$2^{3^{2^{5^{0}}}} = 2^{3^{2^{1}}} = 2^{3^{2}} = 2^9 = 512$$

($5^0 \rightarrow 1$; $2^1 \rightarrow 2$; $3^2 \rightarrow 9$)

$$3^{4^{1^{7^{0}}}} = 3^{4^{1^{1}}} = 3^{4^{1}} = 3^4 = 81$$

($7^0 \rightarrow 1$; $1^1 \rightarrow 1$; $4^1 \rightarrow 4$)

RADICACIÓN

Es una operación en la cual tenemos que hallar una expresión llamada raíz, de modo que se cumpla que al elevarse al índice nos dé el radicando.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n \quad ; \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq 2$$

(n → Índice; b → Raíz; a → Radicando)

Definición

Exponente fraccionario

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Teoremas

1. Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

$\sqrt{36\,.\,25} = \sqrt{36}\,.\,\sqrt{25} = 6\,.\,5 = 30$

$\sqrt[3]{x^{12}\,.\,y^{18}} = \sqrt[3]{x^{12}}\,.\,\sqrt[3]{y^{18}} = x^4\,.\,y^6$

$\sqrt[5]{a^{10}\,.\,b^{15}\,.\,c^{25}} = \sqrt[5]{a^{10}}\,.\,\sqrt[5]{b^{15}}\,.\,\sqrt[5]{c^{25}} = a^2\,.\,b^3\,.\,c^5$

2. Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ ; b \neq 0$$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$

$\sqrt[4]{\frac{256}{81}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{4}{3}$

$\sqrt[5]{\frac{3125}{243}} = \frac{\sqrt[5]{3125}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{5}{3}$

3. Raíz de raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplos:

$\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[5.4]{a} = \sqrt[20]{a}$

$\sqrt[10]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \sqrt[10.3.2]{x} = \sqrt[60]{x}$

$\sqrt[4]{\sqrt[6]{\sqrt{m}}} = \sqrt[4.6.2]{m} = \sqrt[48]{m}$

4. Raíz de raíz con variables entre radicales

$$\sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b\sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[mnp]{x^{(an+b)p+c}}$$

Ejemplos:

$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[4\,.\,3]{x^{1\,.\,3+5}} = \sqrt[12]{x^8}$

$\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}}} = \sqrt[5\,.\,3\,.\,4]{x^{(2.3+5)4+1}} = \sqrt[60]{x^{45}}$

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = \sqrt[2\,.\,2\,.\,2\,.\,2]{x^{[(1\,.\,2+1)2+1]2+1}} = \sqrt[16]{x^{15}}$



Recuerda

Leyes de signos

$(+)^{par} = +$

$(+)^{impar} = +$

$(-)^{par} = +$

$(-)^{impar} = -$

Observación

Ejemplos:

$\sqrt{256} = 16$

$\sqrt[3]{729} = 9$

$\sqrt[5]{3125} = 5$



Nota

$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xk]{a^{yk}}$

$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[\frac{x}{k}]{a^{y/k}} \ ; \ \frac{x}{k} \in \mathbb{N} \wedge x \geq 2k$



Observación

Leyes de signos

$\sqrt[par]{+} = +$

$\sqrt[impar]{+} = +$

$\sqrt[impar]{-} = -$

$\sqrt[par]{-} =$ n.° imaginario

Problemas resueltos

1 Resuelve:

$$E = \left[\left(x^2\right)^3\right]^4 . x^{\left(2^3\right)^4}$$

Resolución:

Aplicamos propiedades:

$$E = \left[x^6\right]^4 . x^{8^4}$$

$$E = x^{24} . x^{4096}$$

$$\therefore E = x^{4120}$$

2 Halla el valor de:

$$M = \frac{(21)^6 . (35)^5 . (80)^3}{(15)^4 . (14)^{10} . (30)^2}$$

Resolución:

Descomponemos cada número como producto de factores primos:

$$M = \frac{(3.7)^6 . (5.7)^5 . (2^4.5)^3}{(3.5)^4 . (2.7)^{10} . (2.3.5)^2}$$

Aplicamos propiedades:

$$M = \frac{3^6 . 7^6 . 5^5 . 7^5 . 2^{12} . 5^3}{3^4 . 5^4 . 2^{10} . 7^{10} . 2^2 . 3^2 . 5^2}$$

Agrupando:

$$M = \frac{2^{12} . 3^6 . 5^8 . 7^{11}}{2^{12} . 3^6 . 5^6 . 7^{10}} = 5^2 . 7$$

$$\therefore M = 175$$

3 Halla $3n + 7$, si:

$$2^{3^{8^n}} = 512$$

Resolución:

Expresamos 512 como una potencia de 2:

$$2^{3^{8^n}} = 2^9 \Rightarrow 3^{8^n} = 9$$

Ahora expresamos 9 como una potencia de 3:

$$3^{8^n} = 3^2 \Rightarrow 8^n = 2$$

Como: $8 = 2^3$; $(2^3)^n = 2$

$$2^{3n} = 2^1 \Rightarrow 3n = 1$$

$$\therefore 3n + 7 = 1 + 7 = 8$$

4 Calcula:

$$N = \frac{9^{2^{-1}} + 36^{2^{-1}} + 125^{3^{-1}}}{4^{2^{-1}}}$$

Resolución:

Aplicamos la definición de exponente negativo:

$$N = \frac{9^{1/2} + 36^{1/2} + 125^{1/3}}{4^{1/2}}$$

Ahora aplicamos la definición de exponente fraccionario:

$$N = \frac{3 + 6 + 5}{2} = \frac{14}{2}$$

$$\therefore N = 7$$

5 Si:

$$P = 36^{32^{-5^{-1}}} \quad \text{y} \quad Q = 49^{64^{-6^{-1}}}$$

¿Cuánto vale "Q – P"?

Resolución:

$$P = 36^{32^{-5^{-1}}} = 36^{32^{-1/5}} = 36^{1/2}$$

Luego: $P = 6$

$$Q = 49^{64^{-6^{-1}}} = 49^{64^{-1/6}} = 49^{1/2}$$

Entonces: $Q = 7$

$$\therefore Q - P = 7 - 6 = 1$$

6 Calcula el valor de:

$$M = \sqrt[n-1]{\frac{5^{3n+1}}{\sqrt[n]{5^{n^2+3n}}}}$$

Resolución:

Aplicamos la definición de exponente fraccionario:

$$M = \sqrt[n-1]{\frac{5^{3n+1}}{5^{(n^2+3n)/n}}} = \sqrt[n-1]{\frac{5^{3n+1}}{5^{n+3}}}$$

$$= \sqrt[n-1]{5^{2n-2}}$$

$$= \sqrt[n-1]{5^{2(n-1)}}$$

$$= 5^2$$

$\therefore M = 25$

7 Efectúa:

$$E = \sqrt[x]{27^{x+9}} \cdot \sqrt[x]{81^{x-4}} \cdot \sqrt[x]{9^{-3x-5,5}}$$

Resolución:

Aplicamos la definición de exponente fraccionario y descomponemos:

$$E = (3^3)^{\frac{x+9}{x}} \cdot (3^4)^{\frac{x-4}{x}} \cdot (3^2)^{\frac{-3x-5,5}{x}}$$

$$E = 3^{\frac{3x+27}{x}} \cdot 3^{\frac{4x-16}{x}} \cdot 3^{\frac{-6x-11}{x}}$$

$$E = 3^{\frac{x}{x}}$$

$\therefore E = 3$

8 Simplifica: $\sqrt[9]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt[4]{a^7}}}}$, e indica el exponente de "a" que se obtiene.

Resolución:

Aplicamos la propiedad de radicales:

$$\sqrt[9.3.2.4]{a^{[(5.3+1)2+1]4+7}}$$

$$\sqrt[216]{a^{139}} = a^{139/216}$$

$\therefore$ El exponente es: $\dfrac{139}{216}$

9 Halla el valor de N si:

$$N = \frac{\sqrt[5]{27\sqrt[5]{27}}}{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}}}$$

Resolución:

Expresamos 27 como 3^3:

$$N = \frac{\sqrt[5]{3^3\sqrt[5]{3^3}}}{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}}}$$

Aplicamos la propiedad de radicales:

$$N = \frac{\sqrt[5.5]{3^{3.5+3}}}{\sqrt[2.2.2]{3^{(1.2+1)2+1}}}$$

$$N = \frac{\sqrt[25]{3^{18}}}{\sqrt[8]{3^7}} = \frac{3^{18/25}}{3^{7/8}} = 3^{18/25 - 7/8}$$

$\therefore N = 3^{-31/200}$

10 Efectúa: $R = \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt[1/2]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[1/2]{3}}}}$

Resolución:

Aplicando propiedad de radicales:

$$R = \sqrt[5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}]{3^{[(1 \cdot \frac{1}{2}+1)3+1]\frac{1}{2}+1}}$$

$$R = \sqrt[15/4]{3^{15/4}}$$

$\therefore R = 3$

11 Resuelve: $L = \sqrt[a^n]{\dfrac{a^{1+a^n} + a^{(a^n\sqrt{2})^n}}{a + a^{a^n}}}$

Resolución:

Aplicamos las propiedades de exponentes:

$$L = \sqrt[a^n]{\frac{a.a^{a^n} + a^{2.a^n}}{a + a^{a^n}}} = \sqrt[a^n]{\frac{a.a^{a^n} + a^{a^n}.a^{a^n}}{a + a^{a^n}}}$$

Luego:

$$\sqrt[a^n]{\frac{a^{a^n}(a + a^{a^n})}{a + a^{a^n}}}$$

Simplificamos y aplicamos la propiedad de radicales: $L = \sqrt[a^n]{a^{a^n}}$

$\therefore L = a$

Actividades de razonamiento

1. Reduce:

$$\frac{4 \,.\, 3^{a^{2b}+1} + 3^{a^{2b}+4} - 2 \,.\, 3^{a^{2b}+3}}{3^{a^{2b}+2} + 4 \,.\, 3^{a^{2b}}}$$

A) 6 B) 5 C) 3 D) 2 E) 4

2. Efectúa:

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$$

A) 3142 B) 4096 C) 3156 D) 4116 E) 3412

3. Simplifica:

$$\frac{2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n}}{9 \,.\, 2^{n} + 2^{n+2}}$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 13

4. Simplifica:

$$\sqrt[n]{\frac{2^{n} + 5^{n}}{2^{-n} + 5^{-n}}}$$

A) 9 B) 8 C) 6 D) 10 E) 7

5. Reduce:

$$K = \frac{\left(a^{2n-1}\right)^{4} . \left(b^{3n+2}\right)^{5}}{a^{8n-6} \,.\, b^{15n+8}}$$

A) ab^2 B) $(a \,.\, b)^2$ C) $a^2 \,.\, b$ D) 1 E) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$

6. Reduce:

$$M = \frac{4^{3} \,.\, \left(8^{4/3}\right)^{-n}}{\left[4\left(4^{-1}\right)^{n}\right]^{2}}$$

A) 8 B) 2^n C) 4 D) 16 E) 12

7. Reduce:

$$K = \frac{6^{n} \,.\, 35^{n} \,.\, 143^{n}}{10^{n} \,.\, 33^{n} \,.\, 91^{n}}$$

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

8. Simplifica la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt[5]{119}^{\sqrt{5}^{\frac{-5}{9}}}\right)^{\sqrt{5}^{\frac{23}{9}}}$$

A) 112 B) 119 C) 130 D) 120 E) 115

9. Reduce:

$$R = \sqrt[m]{2^{m+4}} \cdot \sqrt[m]{4^{m+1}} \cdot \sqrt[m]{8^{m-2}}$$

A) 64 B) 8 C) 4 D) 16 E) 32

10. Reduce:

$$M = \left[9\left(\sqrt[k]{3}\right)^{k-12} \cdot \left(\sqrt[k]{27}\right)^{k+4}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

A) 81 B) $\frac{1}{9}$ C) 3 D) 27 E) $\frac{1}{3}$

11. Efectúa:

$$E = \frac{\overbrace{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \ldots \sqrt[3]{a}}^{45 \text{ veces}}}{\underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \ldots \sqrt{a}}_{20 \text{ veces}}} \div \frac{a^4}{a^{-1}}$$

A) 5 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

12. Determina el exponente final de "a" después de simplificar la siguiente expresión:

$$B = a^3 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt{a^3}}}$$

A) 6 B) 7 C) $\frac{21}{8}$ D) $\frac{45}{8}$ E) $\frac{24}{8}$

13. Reduce:

$$L = \frac{m^2 \cdot \sqrt{m^{-3} \cdot \sqrt{m^{-5}}}}{\sqrt{m^{-7}\sqrt{m^{-9}}}}$$

A) m B) m^{-5} C) m^3 D) m^{-3} E) m^5

14. Simplifica y calcula el exponente de "x" en:

$$E = \sqrt[16]{x^5} \cdot \sqrt{x\sqrt{\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}$$

A) 1 B) 4 C) 5 D) 2 E) 3

Claves

1. C
2. E
3. A
4. D
5. B
6. C
7. E
8. B
9. A
10. B
11. C
12. D
13. E
14. A

Reto



Indica el exponente final de "x" en:

$$M = \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^3 \ldots \text{"n" radicales}}}}$$

Rpta.: $\frac{4^n - 1}{4^n}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Efectúa:

$M = \left(2ab^{\frac{1}{3}}\right)^3$

A) 2ab B) $8a^3b$ C) 8ab D) $2a^3b$ E) 4ab

2. Calcula el valor de:

$E = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{6}$

3. Efectúa:

$S = \dfrac{\left(x^2y^3\right)^7\left(x^5y^6\right)^3}{\left(x^4y^5\right)^3\left(x^3y^2\right)^4}$

A) x^5y^{16} B) x^5y^6 C) $x^{15}y^{16}$ D) xy E) 1

4. Reduce:

$B = \dfrac{15^6.12^4.5^9.6^4}{10^{11}.3^{14}.5^4}$

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3 E) 5

5. Reduce:

$E = \dfrac{\left(3^2\right)^4\cdot\left(3^3\right)^{3^2}}{\left(3^4\right)^5\cdot\left(3^5\right)^3}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6. Reduce: $E = \left[4^{-1} + 5 + \frac{7}{4} - 2(-6^0)\right]^{2^{-1}}$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) 5 D) $\sqrt{5}$ E) 1

7. Reduce:

$E = \dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{x}}$

A) x^2 B) 1 C) x^{-1} D) x E) $\sqrt[8]{x}$

8. Simplifica:

$P = \dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5}\,.\,\sqrt[5]{ab^2}}{\sqrt[20]{a^{19}b^{13}}}$

A) a B) ab C) $\frac{b}{a}$ D) b E) $\frac{a}{b}$

9. Calcula el valor de:

$A = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 3\right]^{0,5}$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(10) Calcula el valor de:

$$S = \left[\left(\frac{4}{11}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

NIVEL 2

(11) Simplifica:

$$B = \left(\sqrt{3}\,.\sqrt{3}\,.\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} + \left(\sqrt{2}\,.\sqrt{2}\,.\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}}$$

A) 35 B) 14 C) 12 D) 13 E) 11

(12) Calcula:

$$C = \frac{\left(\sqrt[5]{25}\right)^3\left(\sqrt[15]{5}\right)\left(\sqrt[3]{25}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[5]{125}\right)}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt[3]{5}$ C) 1 D) 25 E) 5

(13) Calcula el valor de M.

$$M = \sqrt{2}\,.\sqrt{2}^{9^{2^{-1}}}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 64

(14) Reduce:

$$E = \frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt[8]{8}}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 4 E) $2\sqrt{2}$

(15) Reduce:

$$E = \frac{2^{m+1}.4^{m+2n}}{8^{m-1}.16^{n+1}}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

(16) Reduce:

$$N = \underbrace{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}\ldots\sqrt[3]{4}}_{15\text{ veces}} - 32^2$$

A) –1 B) –2 C) 0 D) 1 E) 2

(17) Simplifica:

$$M = \frac{3^{n+3} - 3^{n+1}}{3\left(3^{n-1}\right)}$$

A) 3^n B) 27 C) 24 D) 8 E) 18

(18) Halla el valor de:

$$M = \frac{2^n + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

NIVEL 3

19 Efectúa:

$$M = \sqrt[3]{\frac{2^{n+6} - 2^{n+5}}{2^{n+2}}}$$

A) 1 B) 2 C) 32 D) 4 E) 8

20 Calcula x, si:

$$\left(27^{x}\right)^{2} = \left(\left(9^{3}\right)^{2}\right)^{4}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

21 Si: $x^x = 2$, calcula:

$$F = x^{x^{1+2x}}$$

A) 8 B) 16 C) 12 D) 32 E) 4

22 Simplifica:

$$M = \frac{2^{m+3} \cdot 7^{2m+1} - 2^{m+1} \cdot 7^{2m}}{2^{m+5} \cdot 7^{2m} - 2^{m+1} \cdot 7^{2m+1}}$$

A) 1 B) 2 C) 2^m D) 3 E) 7^m

23 Halla x en:

$$\left(2^{2^{x-2}}\right)^{2^{x-4}} = 4^8$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

24 Simplifica R, si $m \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$R = m^{3x^2+5} . m^{x^2-1} . m^{-(4+4x^2)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25 Resuelve:

$$3^{27^{x+3}} = 27^{9^{x+3}}$$

A) 1 B) −2 C) 3 D) 4 E) 5

26 Resuelve:

$$3^{4^{x+3}} = 3^{16^{2x-5}}$$

A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{13}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Claves

NIVEL 1	8 D	15 A	22 D
1 B	9 A	16 C	23 A
2 C	10 C	17 C	24 A
3 A	NIVEL 2	18 B	25 B
4 A	11 A	NIVEL 3	26 A
5 E	12 E	19 B	
6 B	13 B	20 D	
7 D	14 C	21 B	

Productos notables

DEFINICIÓN

Son productos, cuyos resultados se deben obtener sin necesidad de efectuar operaciones, se le conoce también con el nombre de identidades algebraicas o equivalencias algebraicas, ya que se cumple para cualquier valor que se le asigne a sus variables.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Binomio al cuadrado

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Diferencia de cuadrados

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Binomio al cubo

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$$

Suma y diferencia de cubos

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$
$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

Producto de multiplicar binomios con un término común

$$(X + A)(X + B) = X^2 + (A + B)X + AB$$
$$(X + A)(X + B)(X + C) = X^3 + (A + B + C)X^2 + (AB + BC + AC)X + ABC$$

Desarrollo de un trinomio al cuadrado

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$$

Desarrollo de un trinomio al cubo

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3(A + B)(B + C)(a + C)$$
$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3(A + B + C)(AB + BC + AC) - 3ABC$$

Importante

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
- $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
- $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4$



Recuerda

- $(2x + 3)^3$
  $= (2x)^3 + 3(2x)^2 3 + 3(2x)3^2 + 3^3$
  $= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
- $(3x - 2)^3$
  $= (3x)^3 - 3(3x)^2 2 + 3(3x)2^2 - 2^3$
  $= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
- $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = x^3 + 4^3 = x^3 + 64$
- $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = x^3 - 5^3 = x^3 - 125$



Observación

- $(x + 15)(x - 10)$
  $= x^2 + (15 - 10)x - 10.15$
  $= x^2 + 5x - 150$
- $(2x + 3)(2x + 2)$
  $= (2x)^2 + (3 + 2)2x + 3 . 2$
  $= 4x^2 + 10x + 6$
- $(x + y + 7)^2$
  $= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + 7y + 7x)$
  $= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 14y + 14x$

Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$Q = \frac{(x^6+y^6)^2+(x^6-y^6)^2}{x^{12}+y^{12}}$$

Resolución:

Aplicamos binomio al cuadrado:

$$Q=\frac{(x^6)^2+2x^6y^6+(y^6)^2+(x^6)^2-2x^6y^6+(y^6)^2}{x^{12}+y^{12}}$$

$$Q=\frac{x^{12}+2x^6y^6+y^{12}+x^{12}-2x^6y^6+y^{12}}{x^{12}+y^{12}}$$

$$Q=\frac{2x^{12}+2y^{12}}{x^{12}+y^{12}}=\frac{2(x^{12}+y^{12})}{x^{12}+y^{12}}$$

$\therefore Q = 2$

2 Efectúa:

$M = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)-x^{32}$

Resolución:

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$M = \underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)-x^{32}$

$M = \underbrace{(x^4-1)(x^4+1)}(x^8+1)(x^{16}+1)-x^{32}$

$M = \underbrace{(x^8-1)(x^8+1)}(x^{16}+1)-x^{32}$

$(x^{16}-1)(x^{16}+1)-x^{32}$

$x^{32}-1-x^{32}$

$\therefore M = -1$

3 Efectúa:

$$B = \frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(x-z)^3}{5}$$

Sabemos que: $x-y=y-z=1$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=1\\ y-z=1 \end{array}\right\}(+)$$
$$x-z=2$$

Luego:

$$B=\frac{1^3+1^3+2^3}{5}$$

$$B=\frac{1+1+8}{5}=\frac{10}{5}$$

$\therefore B = 2$

4 Calcula:

$A = (\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{4})$

Resolución:

Ordenamos la expresión:

$A = (\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{10}^2+\sqrt[3]{10}\,.\,\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2)$

Aplicamos diferencia de cubos:

$A = (\sqrt[3]{10})^3-(\sqrt[3]{2})^3 = 10-2$

$\therefore A = 8$

5 Si $A = (a+b)(a^2+ab+b^2)$

$B = (a-b)(a^2-ab+b^2)$

Al simplificar, AB resulta:

Resolución:

$A.B = (a+b)(a^2+ab+b^2)\,.\,(a-b)(a^2-ab+b^2)$

Acomodamos:

$A.B = (a+b)(a^2-ab+b^2)\,.\,(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Aplicamos suma y diferencia de cubos:

$A.B = (a^3+b^3)(a^3-b^3)$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$A.B = (a^3)^2-(b^3)^2$

$\therefore AB = a^6-b^6$

6 Simplifica:

$A = (x+8)(x+9)-(x+7)(x+10)$

$B = (x-5)(x-4)-(x-6)(x-3)$

Luego, calcula: AB

Resolución:

Aplicamos: $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)\,x+ab$

$A = x^2+17x+72-(x^2+17x+70)$

$A = x^2+17x+72-x^2-17x-70$

$A = 2$

Luego:

$B = x^2-9x+20-(x^2-9x+18)$

$B = x^2-9x+20-x^2+9x-18$

$B = 2$

$\therefore AB = 2\,.\,2 = 4$

7 Si: $a + b + c = 4$

$a^2 + b^2 + c^2 = 24$

calcula:

$K = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2$

Resolución:

Sabemos que:

$\underbrace{(a + b + c)^2}_{4^2} = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{24} + 2ab + 2bc + 2ac$

$4^2 = 24 + 2ab + 2bc + 2ac$

$16 = 24 + 2ab + 2bc + 2ac$

$-8 = 2ab + 2bc + 2ac$

Piden:

$K = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2$

$= a^2 + b^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2bc + a^2 + c^2 + 2ac$

$= 2\underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{2\,.\,24} + \underbrace{2ab + 2bc + 2ac}_{(-8)}$

$2\,.\,24 \quad + \quad (-8)$

$48 \quad - \quad 8$

$\therefore K = 40$

8 Reduce:

$[(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 + a^2 + 16b^2] - (4b - a)^2$

Resolución:

Aplicamos Legendre: $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$[\underbrace{(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2}_{} + a^2 + 16b^2] - (4b - a)^2$

$4a(2b) + a^2 + 16b^2 - (4b - a)^2$

$\underbrace{8ab + a^2 + 16b^2}_{} - (4b - a)^2$

$(4b + a)^2 - (4b - a)^2$

Aplicamos Legendre:

$4(4b)(a) = 16ab$

9 Si: $(a + b + c + d)^2 = 4(a + b)(c + d)$;

calcula el valor de:

$F = \sqrt[3(a+b)]{27^{c+d}}$

Resolución:

Aplicamos binomio al cuadrado:

$\underbrace{(a + b + c + d)^2}_{} = 4(a + b)(c + d)$

$(a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2$

$= 4(a + b)(c + d)$

$(a + b)^2 - 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 = 0$

$[(a + b) - (c + d)]^2 = 0$

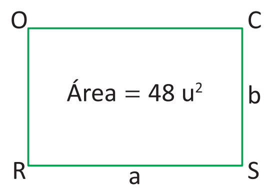
$a + b = c + d$

Luego:

$F = \sqrt[3(a+b)]{27^{(c+d)}} = \sqrt[3]{27}$

$\therefore F = 3$

10 En el rectángulo ROCS, RC = 10 u. Calcula a + b.



Resolución:

Del gráfico: $ab = 48\ u^2$

Por Pitágoras: $a^2 + b^2 = RC^2$

$a^2 + b^2 = 10^2$

$a^2 + b^2 = 100$

Sabemos que:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{} + 2\underbrace{ab}_{}$

$(a + b)^2 = 100 + 2(48)$

$(a + b)^2 = 100 + 96$

$(a + b)^2 = 196$

$\therefore a + b = 14$

11 Halla el valor de E:

$E = (a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2 - (a + b + c)^2$

Para: $a = \sqrt{\sqrt{5} + 3}$; $b = \sqrt{\sqrt{5} + 7}$; $c = \sqrt{40 - 2\sqrt{5}}$

Resolución:

$E = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2$

$-(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)$

$E = a^2 + b^2 + c^2$

Reemplazamos:

$E = (\sqrt{\sqrt{5} + 3})^2 + (\sqrt{\sqrt{5} + 7})^2 + (\sqrt{40 - 2\sqrt{5}})^2$

$E = \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} + 7 + 40 - 2\sqrt{5} = 50$

Actividades de razonamiento

1. Si: $a - b = 3$ y $ab = 4$;
calcula: $a + b$

A) 3 B) 7 C) 5 D) 4 E) 6

2. Calcula:

$$E = \sqrt{\left(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) - 3}$$

A) 1 B) 4 C) 2 D) 5 E) 3

3. Calcula:

$$E = \sqrt[32]{1 + 3\left(2^2 + 1\right)\left(2^4 + 1\right)\left(2^8 + 1\right)}$$

A) 2 B) 0 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) 1

4. Si: $a(a^2 + 3b^2) = b(b^2\ 3a^2) + 8$,
¿qué valor tiene $a - b$?

A) 5 B) 3 C) 7 D) 4 E) 2

5. Si: $ab = 3$ y $a + b = 5$;
calcula: $a^2 + b^2$

A) 19 B) 28 C) 32 D) 21 E) 25

6. Efectúa:
$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1) - x^9$

A) 5 B) 1 C) 3 D) 2 E) 4

7. Calcula m, si:
$(x + 4)^2 = x^2 + mx + 16$

A) 7 B) 10 C) 4 D) 8 E) 6

8. Efectúa:

$$C = \frac{\left(x + y\right)^3 - \left(x - y\right)^3}{\left(y^2 + 3x^2\right)}$$

A) x B) −y C) 2y D) 2 E) xy

9. Si: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

calcula: $\dfrac{\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}$

A) x B) 2 C) 3 D) x^2 E) 1

10. Si: $a^2 + b^2 = 45$ y $ab = 18$;

halla: $a^3 - b^3$

A) 135 B) 156 C) 186 D) 189 E) 179

11. Si: $b + \dfrac{1}{b} = 6$;

calcula : $b^2 + \dfrac{1}{b^2}$

A) 42 B) 40 C) 34 D) 36 E) 28

12. Si: $(m+n)^2 = 4mn$;

calcula: $C = \dfrac{7m+5n}{3m-n}$

A) 2 B) 6 C) 7 D) 4 E) 5

13. Efectúa:

$(m^5 + 5)(25 + m^{10} - 5m^5) - 125$

A) m B) 5m C) m^5 D) 10m E) m^{15}

14. Si: $x^2 + 1 = 4x$;

halla: $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

A) 1 B) 4 C) 5 D) 2 E) $\sqrt{2}$

Claves

1. C	5. A	9. E	13. E
2. B	6. B	10. D	14. E
3. D	7. D	11. C	
4. E	8. C	12. B	

Reto



Simplifica:

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2}{2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{2}$$

Rpta.: 2

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Efectúa:
$(x-6)(x+5)+(x+2)(x-1)+32$
A) $5x^2$ B) x^2 C) $3x^2$ D) $4x$ E) $2x^2$

2. Efectúa:
$(a+2x)(2x-3a)+4ax+3a^2$
A) $4x^2$ B) $3x^2$ C) $2x^2$ d) x^2 E) $5x^2$

3. Efectúa:
$(x+4)^2+(x-4)^2-2(x^2-4)$
A) $2x$ B) 32 C) 40 D) 30 E) x^2

4. Efectúa:
$(x+2)^3-6x(x+2)-8$
A) x B) x^4 C) x^5 D) x^3 E) x^2

5. Efectúa:
$(x+1)^3-(x-1)^3-6x^2$
A) 1 B) 4 C) 3 D) 5 E) 2

6. Efectúa:
$M=\sqrt[3]{(x+y)(x^2-xy+y^2)-y(3x^2-3xy+2y^2)}$
A) x B) $x-y$ C) $x.y$ D) y E) $x+y$

7. Efectúa:
$\left(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{4}\right)$
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) 16 D) 8
E) 4

8. Simplifica:
$$H=\frac{(5x+3y)^2-(5x-3y)^2}{12xy}$$
A) 1 B) 4 C) 5
D) 6 E) 3

9. Simplifica:
$$E=\frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$$
A) $1+xy$ B) $x+y^2$ C) $1-y$
D) $1-y^2$ E) $1+x$

10. Efectúa:
$$N=\frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{x^2+3y^2}$$
A) $2x$ B) xy C) $-2x$
D) x E) 2

NIVEL 2

11. Multiplica:

$M = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

A) x B) $x^6 - 1$ C) $x^3 - 1$ D) 1 E) $x^3 + 1$

12. Calcula:

$R = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2; \forall x; y \in \mathbb{R}^+$

A) $4xy$ B) $x + y$ C) 0

D) $4\sqrt{x\ y}$ E) $2x + 2y$

13. Efectúa:

$R = \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)$

A) 4 B) 3 C) 5 D) 2 E) 1

14. Simplifica:

$E = 2b^2 + 2ab + \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2 - \left(2ab\right)^2}$

A) $b^2 - a^2$ B) $(a - b)^2$ C) $a + b$

D) $(b + a)^2$ E) $a - b$

15. ¿Qué valor tiene $(a - b)^2$?

Si: $a(a^2 + 3b^2) = b(b^2 + 3a^2) + 8$

A) 4 B) 2 C) 5 D) 6 E) 3

16. Simplifica:

$$E = \frac{\left(x + 4\right)^2 - \left(x + 5\right)\left(x + 3\right) - 1}{\left(x + 2\right)\left(x - 2\right) - \left(x + 1\right)\left(x - 1\right)}$$

A) 2 B) 0 C) x D) 1 E) 3

17. Sea: $a = 5 - \sqrt{3}$

$b = \sqrt{3} - 3$

Calcula: $a^2 + b^2 + 2ab$

A) 5 B) 1 C) 2 D) 4 E) 3

18. Sea: $b + \frac{1}{b} = 6$,

Calcula: $b^2 + \frac{1}{b^2}$

A) 36 B) 40 C) 28 D) 30 E) 34

NIVEL 3

19. Si: $a + b = -4 \wedge a \,.\, b = 3$, calcula: $\sqrt{a^2 + b^2 - 6}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) 1

20. Efectúa:

$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1) - 1$

A) x^6 B) 1 C) x^2 D) x^3 E) x^9

21. Sabiendo que: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$

Calcula: $S=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{x+3y}{2x}$

A) 4 B) 2 C) 1 D) 3 E) 5

22. ¿Cuál es el valor de $E=r^2-2r-2$, si: $r=\sqrt{2}+1$?

A) 0 B) 2 C) –1
D) 1 E) 3

23. Si: $x+y=12$

$x\,.\,y=4$

Calcula: $(x-y)^2$

A) 84 B) 64 C) 72
D) 136 E) 128

24. Sabiendo que: $a^3+b^3=270$

$a+b=3$

Calcula: $(a-b)$

A) 10 B) 13 C) 9
D) 11 E) 12

25. Sabiendo que: $x+\frac{1}{x}=4$

Calcula: x^3+x^{-3}

A) 24 B) 40 C) 52
D) 32 E) 48

26. Efectúa:

$$E=\sqrt{1+\left(\frac{x^4-1}{2x^2}\right)^2}$$

A) $\frac{x^4-1}{2x^2}$ B) $\frac{x^4+1}{2x^2}$ C) 1
D) $\frac{x^2+1}{x^2}$ E) $\sqrt{x^2+1}$

27. Si: $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2-n^2}=n^2$,

halla: $E=\sqrt{m^2+n^2}-\sqrt{m^2-n^2}$

A) n^2 B) 2 C) 4
D) m^2 E) 1

Claves

NIVEL 1	8. C	15. A	22. C
1. E	9. D	16. B	23. E
2. A	10. A	17. D	24. D
3. C	NIVEL 2	18. E	25. C
4. D	11. B	NIVEL 3	26. B
5. E	12. D	19. A	27. B
6. B	13. E	20. E	
7. D	14. D	21. A	

Relaciones de tiempo y parentesco

RELACIONES DE PARENTESCO

Ejemplo:

3 padres y 3 hijos acuden a un restaurante. Si cada uno pidió un plato de cebiche, ¿cuántos platos como mínimo se sirvieron?

Resolución:

A cada persona le debemos atribuir la mayor cantidad de relación posibles:

Bisabuelo (bisabuelo, abuelo y padre)

Abuelo (abuelo, padre e hijo)

Padre (padre, hijo y nieto)

Hijo (hijo, nieto y bisnieto)

∴ El número mínimo de platos es 4.

Recuerda

Este tipo de problemas consiste en hallar la cantidad de miembros de una familia, la cual debe ser mínima, para ello a cada persona se le atribuye la mayor cantidad de relaciones posibles.



RELACIONES DE TIEMPO

Ejemplo:

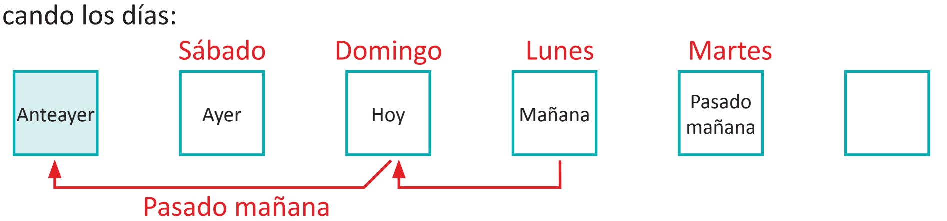
Si el pasado mañana de mañana es miércoles, ¿qué día será el anteayer del ayer de mañana?

Resolución:

Gráficamente:



Ubicando los días:



Luego, el día pedido es viernes.

Con fines prácticos es recomendable ubicar los tiempos partiendo del final de cada problema.

Nota

Empezamos a ubicar los tiempos de atrás hacia adelante.
1.° mañana
2.° pasado mañana

Nota

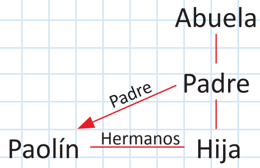
De manera análoga para hallar el día pedido:
1.° mañana
2.° ayer
3.° anteayer

Problemas resueltos

1 Paolín se pregunta: ¿qué relación de parentesco tengo con la única hija del único hijo de mi abuela?

Resolución:

Veamos un esquema:

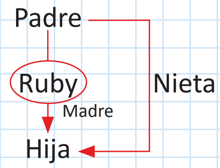


∴ Es su hermana.

2 Ruby es hija única. ¿Qué relación familiar tiene con la madre de la nieta de su padre?

Resolución:

Realizando un esquema:

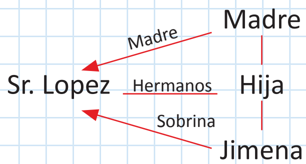


∴ Es ella misma.

3 El señor Lopez se pregunta: ¿qué relación tiene conmigo Jimena si su madre fue la única hija de mi madre?

Resolución:

Haciendo un esquema:

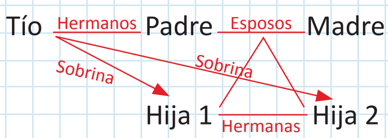


∴ Es mi sobrina.

4 Al cine van 2 esposos, 2 hermanos, 2 sobrinas y 2 hermanas. Halla el mínimo número de personas.

Resolución:

Veamos un esquema:

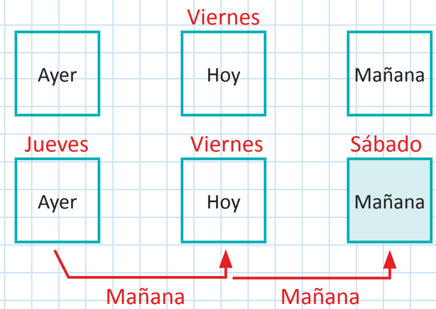


∴ El número mínimo de personas es 5.

5 ¿Cuándo será el mañana del mañana de ayer, si hoy es viernes?

Resolución:

Veamos gráficamente:

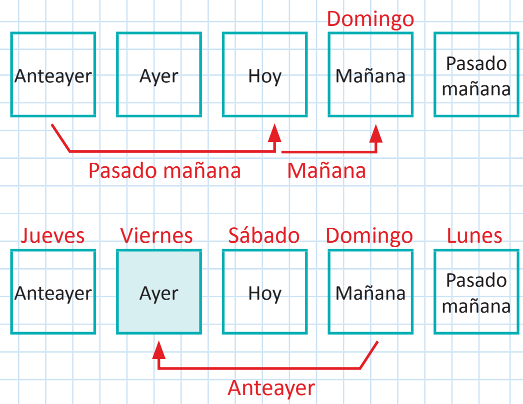


∴ El día será sábado.

6 Si el mañana del pasado mañana de anteayer es domingo, ¿qué día será el anteayer de mañana?

Resolución:

Haciendo un gráfico:

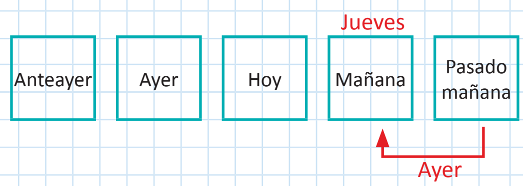


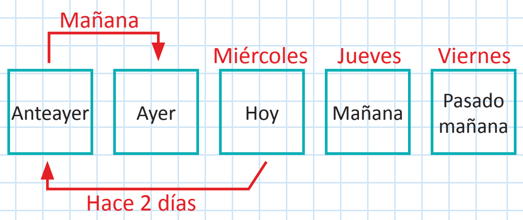
∴ El anteayer de mañana es viernes.

7 Si el ayer de pasado mañana es Jueves, ¿qué día será el mañana de hace 2 días?

Resolución:

Realizando un diagrama:



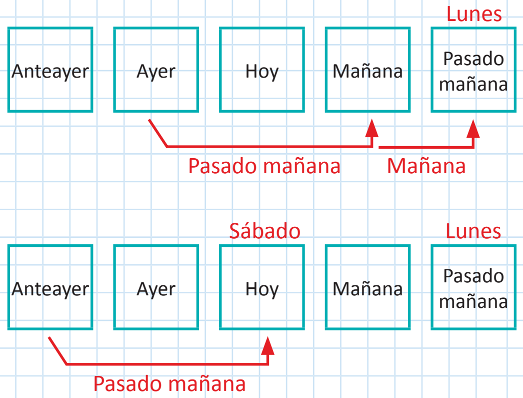


∴ El día será martes.

8 Si el mañana del pasado mañana de ayer es lunes, ¿cuándo será el pasado mañana de anteayer?

Resolución:

Gráficamente:

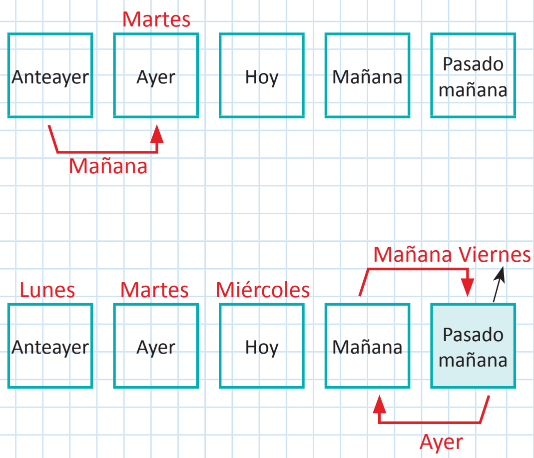


∴ Será sábado.

9 Si el martes es el mañana de anteayer, ¿qué día será el mañana del ayer de pasado mañana?

Resolución:

Gráficamente:

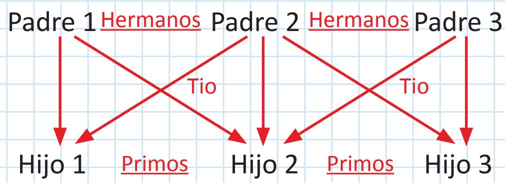


∴ Será viernes.

10 Alrededor de una mesa se encuentran sentados 3 padres, 3 hermanos, 3 tíos, 3 sobrinos y 3 primos. ¿Cuál es el mínimo número de personas que hay en la mesa?

Resolución:

A cada miembro de esta familia le asignamos la mayor cantidad de relaciones familiares. Así los padres son hermanos y tíos a la vez, y los hijos son primos y sobrinos.

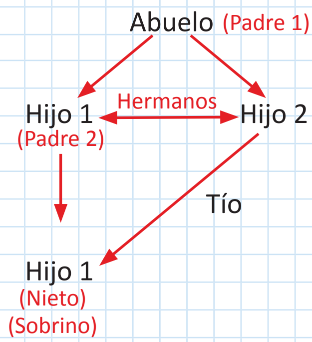


∴ Mínimo número de personas: 6

11 A una reunión asistieron los Pérez. Se sabe que dicha familia está conformada por 2 padres, 2 hermanos, 3 hijos, 1 tío, 1 sobrino, un abuelo y un nieto. ¿Cuántas personas como mínimo conforman la familia Pérez?

Resolución:

Veamos mediante un esquema:



∴ Como mínimo la conforman 4 personas.

Actividades de razonamiento

1. Si el mañana de ayer es sábado, ¿qué día será el mañana de pasado mañana de ayer?

A) Domingo B) Viernes C) Lunes
D) Martes E) Jueves

2. Si el anteayer de ayer es viernes, ¿qué día será el anteayer de pasado mañana?

A) Sábado B) Jueves C) Miércoles
D) Lunes E) Martes

3. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo un hombre que es el hijo de la esposa del único vástago de mi abuela?

A) Mi padre B) Mi tío C) Mi primo
D) Mi abuelo E) N. A.

4. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el suegro de la esposa del único hermano de mi tía?

A) Mi tío B) Mi padre C) Mi abuelo
D) Mi primo E) N. A.

5. En una reunión hay 3 padres, 3 hijos, 2 hermanos, 1 nieto, 1 nieta, 1 primo y una prima. ¿Cuál es el menor número de personas que hay en dicha reunón?

A)7 B) 8 C) 6 D) 4 E) 5

6. En una familia se cuentan 2 padres, 2 madres, 2 tíos, 2 sobrinos, 2 sobrinas, 2 primos, 2 primas. ¿Cuál es el menor número de personas de dicha familia?

A) 8 B) 7 C) 9 D) 6 E) 10

7. Si el ayer del anteayer de mañana es domingo, ¿qué día es el pasado mañana del anteayer de mañana?

A) Lunes B) Martes C) Jueves
D) Miércoles E) Viernes

8. Si el pasado mañana de ayer fue jueves, ¿qué día será el anteayer del ayer de pasado mañana?

A) Lunes B) Miércoles C) Martes
D) Jueves E) Viernes

9. Si el pasado mañana del mañana de ayer será jueves, ¿qué día será el anteayer de ayer de pasado mañana?

A) Lunes B) Martes C) Miércoles
D) Jueves E) Viernes

10. Si mañana será domingo, ¿qué día será el mañana de mañana de pasado mañana de hace 3 días?

A) Martes B) Domingo C) Jueves
D) Sábado E) Miércoles

11. ¿Quién es el único nieto del abuelo del padre de Jorge?

A) Jorge B) Su abuelo C) Su padre
D) Su tío E) su hijo

12. En una reunión hay 2 padres y 2 hijos, ¿cuántas personas hay como mínimo?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

13. El pasado mañana del pasado mañana de hace 3 días será martes. ¿Qué día sería el anteayer del ayer del anteayer de pasado mañana?

A) Lunes B) Martes C) Miércoles
D) Jueves E) Viernes

14. Si el lunes es el mañana del día anterior al pasado mañana de ayer, ¿qué día será el anteayer de pasado mañana?

A) Martes B) Jueves C) Sábado
D) Domingo E) Viernes

Claves

1. C	5. E	9. A	13. E
2. D	6. A	10. B	14. D
3. A	7. D	11. C	
4. C	8. C	12. D	

Reto



Julián salió desaprobado en el curso de Física II. Él le pregunta a su profesor qué día puede dar el examen sustitutorio, y el profesor le responde: "Si el ayer del pasado mañana de hace cuatro días fue martes, darás examen el mañana del mañana de dentro de 3 días". ¿Qué día dará el examen Julián?

Rpta.: miércoles

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si hoy fuese mañana, pasado mañana fuese jueves. ¿Qué día es hoy?

   A) Lunes B) Jueves C) Miércoles
   D) Domingo E) Martes

2. Pasado mañana de mañana es jueves. ¿Qué día fue ayer?

   A) Viernes B) Martes C) Lunes
   D) Jueves E) Domingo

3. Si anteayer fuera hoy, mañana sería miércoles. ¿Qué día fue ayer?

   A) Jueves B) Martes C) Miércoles
   D) Viernes E) Lunes

4. El mañana del pasado mañana de ayer sería miércoles. ¿Qué día será mañana?

   A) Viernes B) Jueves C) Lunes
   D) Martes E) Domingo

5. El ayer del anteayer de pasado mañana es domingo. ¿Qué día fue anteayer?

   A) Jueves B) Sábado C) Martes
   D) Miércoles E) Lunes

6. Si el mañana del pasado mañana de mañana es lunes, ¿qué día fue el ayer del anteayer de mañana?

   A) Domingo B) Sábado C) Miércoles
   D) Martes E) Lunes

7. ¿Qué es mi hijo, respecto al hijo del hijo de mi padre?

   A) El tío B) El abuelo C) El sobrino
   D) El hijo E) El primo

8. ¿Qué parentesco tengo con el único hermano de la hija del padre de mi padre?

   A) Mi padre B) Mi tío C) Mi primo
   D) Mi hijo E) Mi abuelo

9. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el tío del hijo del único hermano de mi padre?

A) Mi tío B) Mi hijo C) Mi primo
D) Mi padre E) Mi abuelo

10. ¿Qué parentesco tengo con Rodrigo si su papá es el único hijo de mi papá?

A) Mi hijo B) Mi sobrino C) Mi primo
D) Mi tío E) Mi abuelo

NIVEL 2

11. Si el ayer de mañana es lunes. ¿Qué día será el mañana del ayer de pasado mañana?

A) Jueves B) Miércoles c) Martes
D) Viernes E) Lunes

12. Si el anteayer del mañana de pasado mañana es viernes. ¿Qué día fue ayer?

A) Miércoles B) Viernes C) Domingo
D) Jueves E) Sábado

13. Si el martes es el mañana de hoy, anteayer fue:

A) Martes B) Lunes C) Jueves
D) Sábado E) Domingo

14. Si el ayer del anteayer de mañana es jueves. ¿Qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

A) Miércoles B) Sábado C) Domingo
D) Martes E) Lunes

15. El anteayer de dentro de cinco días es domingo. ¿Qué día será el pasado mañana del ayer de hace tres días del pasado mañana de mañana?

A) Martes B) Miércoles C) Jueves
D) Domingo E) Viernes

16. Ayer era el pasado mañana del mañana del ayer del domingo. ¿Qué día fue el anteayer del día que precede a hoy?

A) Sábado B) Domingo C) Martes
D) Jueves E) Lunes

17. ¿Quién es el padre del hijo del hijo de Hugo?

A) El hijo de Hugo B) El nieto de Hugo
C) Hugo D) El abuelo de Hugo
E) El padre de Hugo

18. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el hijo del abuelo del hijo del único hermano de mi tía?

A) Mi abuelo B) Mi primo C) Mi padre
D) Mi hermano E) Mi tío

19. ¿Cuál es la relación de parentesco que existe entre el hijo de la esposa del único hijo de mi padre y yo?

A) Mi primo B) Mi abuelo C) Mi nieto
D) Mi primo E) Mi hijo

20. ¿Quién es el único bisnieto del abuelo del padre de Marcos?

A) El abuelo de Marcos B) El tío de Marcos
C) El hijo de Marcos D) El primo de Marcos
E) Marcos

NIVEL 3

21. Si el anteayer del ayer de pasado mañana es lunes, ¿qué día será mañana?

A) Lunes B) Martes C) Jueves
D) Sábado E) Miércoles

22. Si el pasado mañana de mañana es domingo, ¿qué día será el ayer del anteayer de mañana?

A) Miércoles B) Martes C) Viernes
D) Lunes E) Jueves

23. Si el pasado mañana del mañana de ayer es viernes, ¿qué día fue ayer?

A) Domingo B) Miércoles C) Jueves
D) Sábado E) Martes

24. Si el mañana del anteayer de mañana fue martes, ¿qué día será pasado mañana?

A) Martes B) Sábado C) Jueves
D) Miércoles E) Lunes

25) Ayer del pasado mañana de ayer es sábado. ¿Qué día es el mañana del pasado mañana de ayer?

A) Jueves B) Lunes C) Martes
D) Miércoles E) Domingo

26) Sabiendo que el anteayer de mañana es miércoles, ¿qué día será el pasado mañana del ayer de pasado mañana?

A) Domingo B) Miércoles C) Lunes
D) Sábado E) Martes

27) Construyendo un árbol genealógico, ¿cuántos bisabuelos tuvieron tus bisabuelos?

A) 8 B) 128 C) 16 D) 64 E) 32

28) La familia Tinoco consta de un padre, una madre y 8 hijas, además se sabe que cada hija tiene un solo hermano. ¿Cuántas personas hay en dicha familia?

A) 15 B) 8 C) 10 D) 9 E) 11

29) En un almuerzo familiar están presentes tres padre, tres hijos y dos nietos. ¿Cuántas personas como mínimo están compartiendo el almuerzo?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 7

30) Mi madre al limpiar un retrato dice: la madre de este hombre es la suegra de mi padre. ¿Qué parentesco hay entre el hombre del retrato y yo?

A) Es mi primo B) Es mi hijo
C) Es mi nieto D) Es mi tío
E) Es mi abuelo

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3	
1. A	9. D	11. B	17. A	25. B
2. E	10. A	12. A	18. C	26. A
3. C		13. D	19. E	27. D
4. D		14. C	20. E	28. E
5. B		15. E	21. E	29. A
6. D		16. B	22. B	30. E
7. E			23. E	
8. A			24. C	

UNIDAD 4



Paseos silenciosos

Los trenes bala Shinkansen de Japón transportan pasajeros a las principales ciudades del país, a más de 300 kilómetros por hora. En las pruebas, los diseñadores observaron que cuando un tren entraba a un túnel a esa velocidad, las ondas de presión atmosférica producían un ruido ensordecedor que hacían vibrar las ventanillas a 400 metros de distancia. Mientras pensaban cómo resolver este problema, el ingeniero, Eiji Nakatsu, ávido observador de aves, se preguntó si había algún ser vivo que se enfrentara habitualmente a cambios súbitos en la resistencia del aire, y entonces lo recordó: el martín pescador.

Este pájaro se tira del aire, que es un medio de baja resistencia, al agua, que opone más resistencia y salpica solo unas cuantas gotas. Los ingenieros rediseñaron la nariz del tren bala a semejanza del pico del martín pescador, y así redujeron el ruido y el consumo de energía eléctrica.

Matemática recreativa

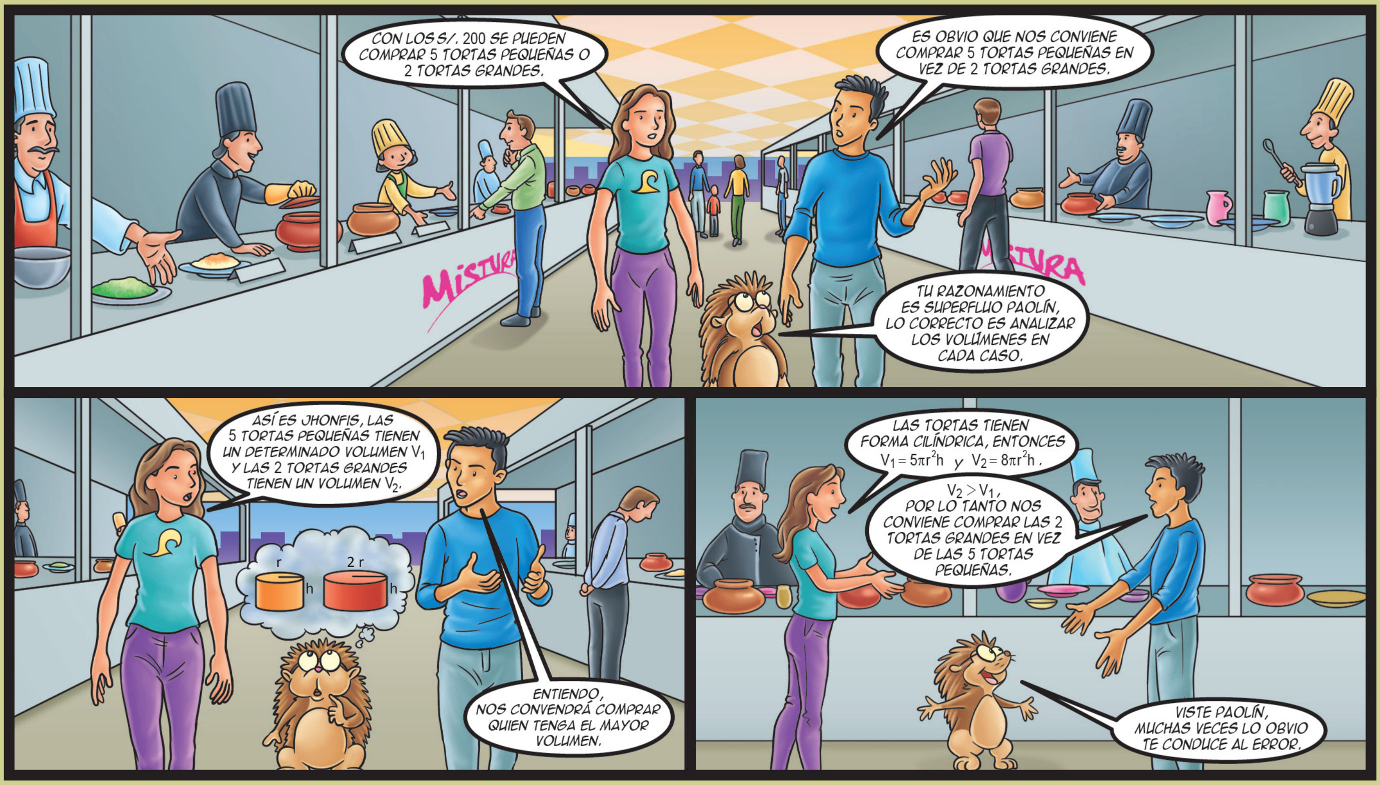
¿Qué torta comprar?

En la pastelería La rica miel se venden dos tortas de la misma calidad y altura. Si las tortas son de base circular, el radio de una es el doble de la otra, y además, la torta pequeña cuesta 40 soles y la grande 100 soles.

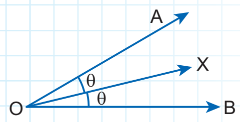
La señora Perla tiene 200 soles para gastar, pero está en duda de cuál es la compra que mejor le conviene, ¿qué le recomendarías tú?

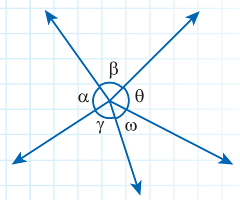


DIÁLOGO



Razonamiento geométrico

> **Nota**
> **Bisectriz de un ángulo**
> Es el rayo que parte del vértice y divide al ángulo en dos ángulos congruentes.
>
> 
>
>
> $\overrightarrow{OX}$: bisectriz
> $\Rightarrow m\angle AOX = m\angle XOB$

> **Nota**
>
> 
>
>
> $\alpha + \beta + \theta + \omega + \gamma = 360°$

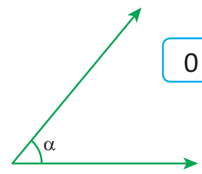
> **Observación**
> - Dado:
> $0° < \alpha < 90°$; $n \in \mathbb{Z}^+$
> $\underbrace{CCC \ldots C}_{\text{"2n" veces}}(\alpha) = \alpha$
>
> $\underbrace{CCC \ldots C}_{\text{"2n + 1" veces}}(\alpha) = C(\alpha) = 90° - \alpha$
> - Dado: $0° < \beta < 180°$; $n \in \mathbb{Z}^+$
> $\underbrace{SSS \ldots S}_{\text{"2n" veces}}(\beta) = \beta$
>
> $\underbrace{SSS \ldots S}_{\text{"2n + 1" veces}}(\beta) = S(\beta) = 180° - \beta$



ÁNGULOS

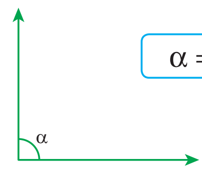
Clasificación según su medida

Ángulo agudo



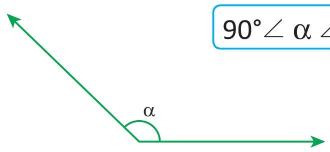
$0 \angle \alpha \angle 90°$

Ángulo recto



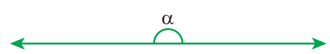
$\alpha = 90°$

Ángulo obtuso



$90° \angle \alpha \angle 180°$

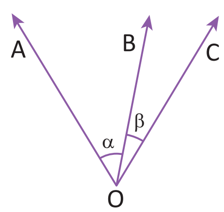
Ángulo llano



$\alpha = 180°$

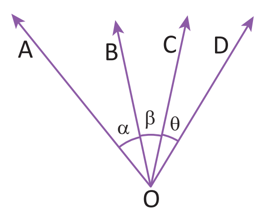
Clasificación según la posición de sus lados

Ángulos adyacentes



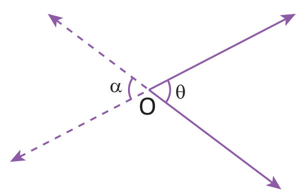
$m\angle AOC = \alpha + \beta$

Ángulos consecutivos



$m\angle AOD = \alpha + \beta + \theta$

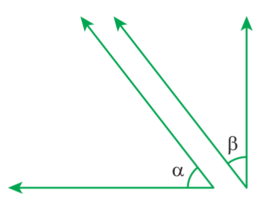
Ángulos opuestos por el vértice



$\alpha = \theta$

Clasificación según la suma de sus medidas

Ángulos complementarios

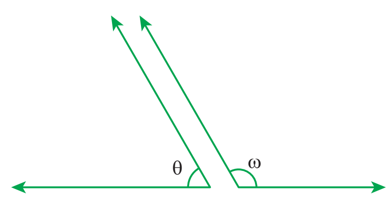


$\alpha + \beta = 90°$

$\alpha = 90° - \beta$
$\beta = 90° - \alpha$

Luego:
α es el complemento de β.
β es el complemento de α.

Ángulos suplementarios

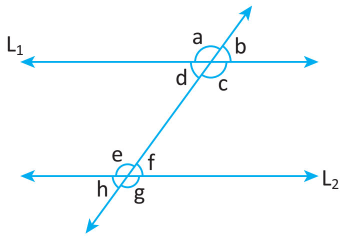


$\theta + \omega = 180°$

$\theta = 180° - \omega$
$\omega = 180° - \theta$

Luego:
θ es el suplemento de ω.
ω es el suplemento de θ.

Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante

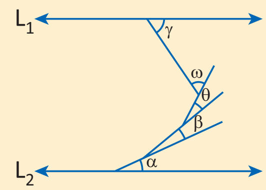


Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, entonces:

- Ángulos alternos internos
  $c = e \ \wedge \ d = f$
- Ángulos alternos externos
  $a = g \ \wedge \ b = h$
- Ángulos conjugados internos
  $d + e = 180° \ \wedge \ c + f = 180°$
- Ángulos conjugados externos
  $a + h = 180° \ \wedge \ b + g = 180°$
- Ángulos correspondientes
  $a = e \ \wedge \ b = f \ \wedge \ d = h \ \wedge \ c = g$

Recuerda

Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$:

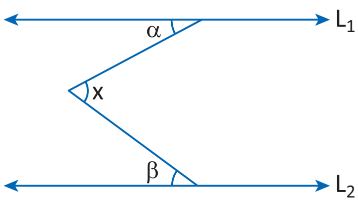


$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta + \omega + \gamma = 180°$



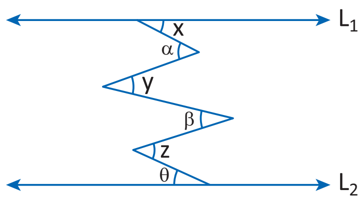
Propiedades

I. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



$$x = \alpha + \beta$$

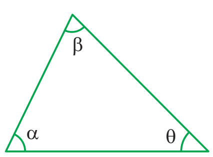
II. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



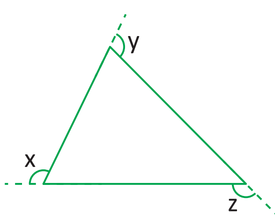
$$\alpha + \beta + \theta = x + y + z$$

TRIÁNGULOS

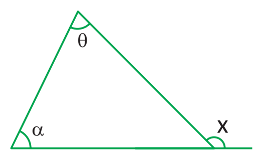
Propiedades básicas



$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

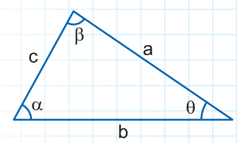


$$x + y + z = 360°$$



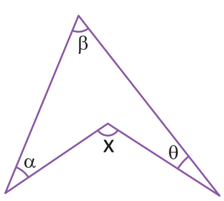
$$x = \alpha + \theta$$

Nota

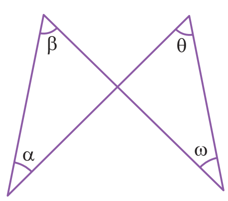


Si $a > b > c$,
entonces $\alpha > \beta > \theta$

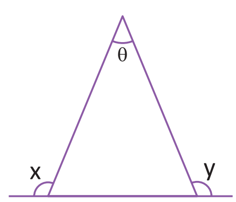
Propiedades adicionales



$$x = \alpha + \beta + \theta$$

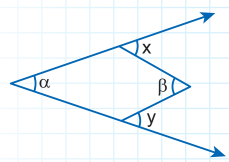


$$\alpha + \beta = \theta + \omega$$



$$x + y = \theta + 180°$$

Nota



$$\alpha + \beta = x + y$$

Problemas resueltos

1 El suplemento del complemento de la medida de un ángulo, es igual a los 3/2 de la diferencia entre el suplemento y complemento de dicho ángulo. Halla la medida del ángulo.

Resolución:

Sea "α" la medida del ángulo.
Por condición del problema:

$$S(C(\alpha)) = \frac{3}{2}(S(\alpha) - C(\alpha))$$

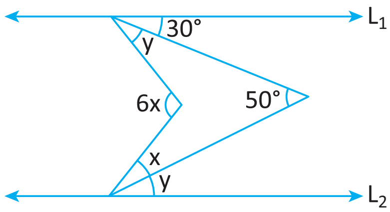
$$S(90° - \alpha) = \frac{3}{2}[(180° - \alpha) - (90° - \alpha)]$$

$$180° - (90° - \alpha) = \frac{3}{2}(90°)$$

$$90° + \alpha = 135$$

$\therefore \alpha = 45°$

2 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla el valor de x.



Resolución:

Por propiedad:

$y + 30° = 50°$

$y = 20°$

También:

$x + y + y + 30° = 6x$

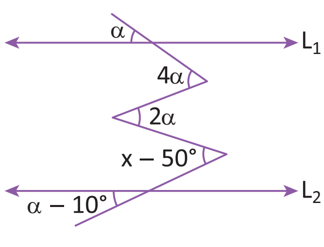
$2y + 30° = 5x$

$2(20°) + 30° = 5x$

$70° = 5x$

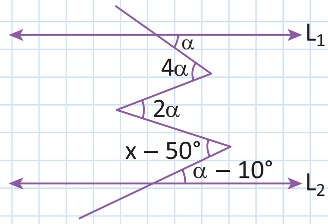
$\therefore x = 14°$

3 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla el valor de x.



Resolución:

Por ángulos opuestos por el vértice se tiene el siguiente gráfico:



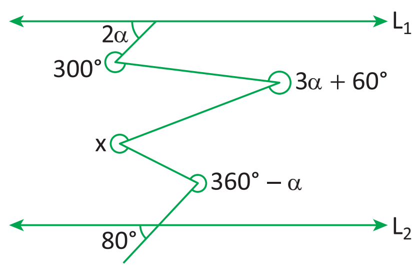
Por propiedad:

$4\alpha + x - 50° = \alpha + 2\alpha + \alpha - 10°$

$4\alpha + x - 50° = 4\alpha - 10°$

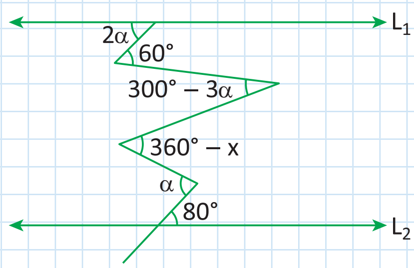
$\therefore x = 40°$

4 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla el valor de x.



Resolución:

Por ángulo de una vuelta se tiene el siguiente gráfico:



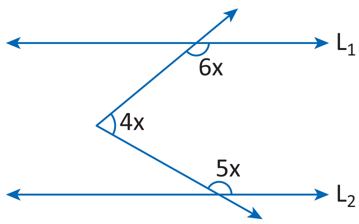
Por propiedad:

$2\alpha + 300° - 3\alpha + \alpha = 60° + 360° - x + 80°$

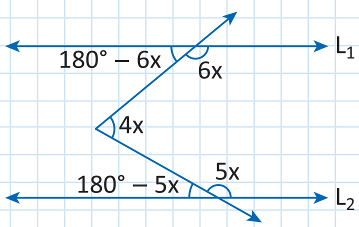
$300° = 500° - x$

$\therefore x = 200°$

5 Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.

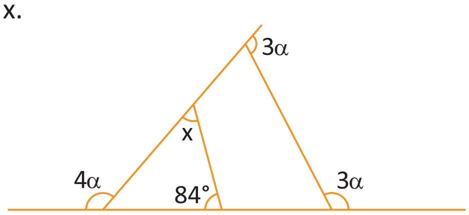


Resolución:

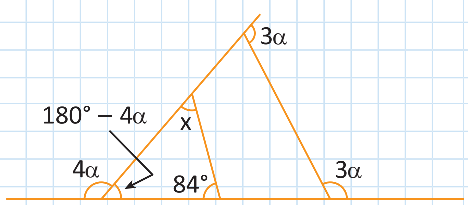


$$180° - 6x + 180° - 5x = 4x$$
$$360° = 15x$$
$$\therefore\ x = 24°$$

6 Halla x.

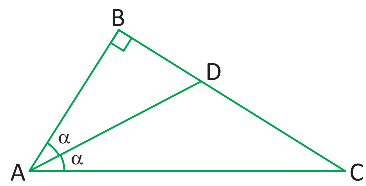


Resolución:

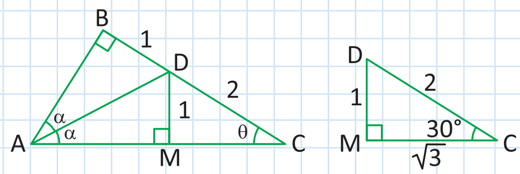


$$(180° - 4\alpha) + 180° = 3\alpha + 3\alpha$$
$$360° = 10\alpha$$
$$\alpha = 36°$$
$$\Rightarrow x + 84° = 4\alpha = 4(36°)$$
$$\therefore x = 60°$$

7 En la figura, calcula α, si BD = 1 m y DC = 2 m.



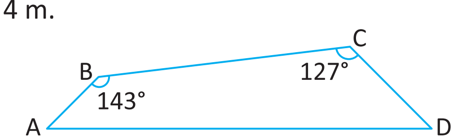
Resolución:



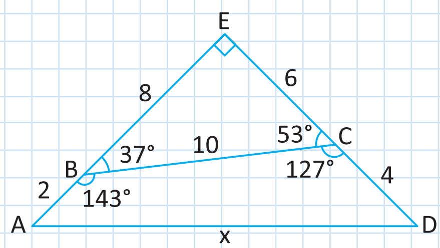
En el triángulo MDC:

$$\theta = 30°$$
$$\Rightarrow 2\alpha + \theta = 90°$$
$$2\alpha + 30° = 90°$$
$$\therefore \alpha = 30°$$

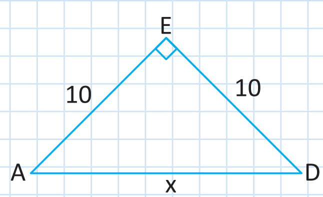
8 En la figura, calcula AD, si AB = 2 m, BC = 10 m y CD = 4 m.



Resolución:



En el triángulo AED:

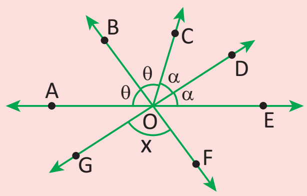


Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$
$$\therefore x = 10\sqrt{2}\ \text{m}$$

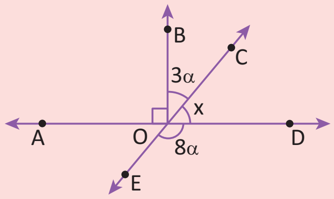
Actividades de razonamiento

1. Halla x.



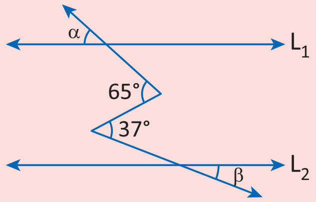
A) 80°　B) 90°　C) 60°
D) 60°　E) 70°

2. Halla x.



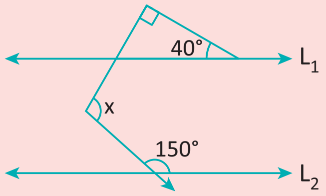
A) 35°　B) 36°　C) 42°
D) 40°　E) 32°

3. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla $\alpha - \beta$, en:



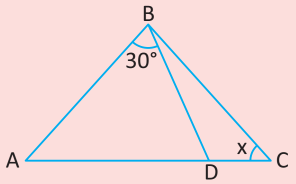
A) 28°　B) 18°　C) 16°
D) 36°　E) 24°

4. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



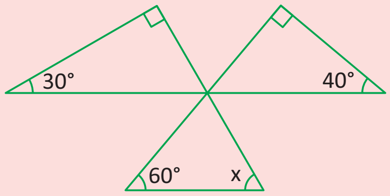
A) 70°　B) 80°　C) 60°
D) 40°　E) 100°

5. Halla x, si: AB = BC = AD



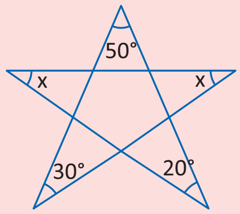
A) 80°　B) 90°　C) 120°
D) 110°　E) 100°

6. Calcula x.



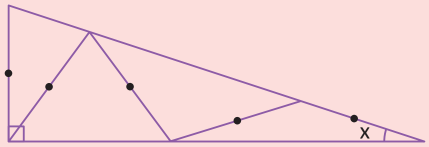
A) 10°　B) 20°　C) 30°
D) 40°　E) 50°

7. Halla x.



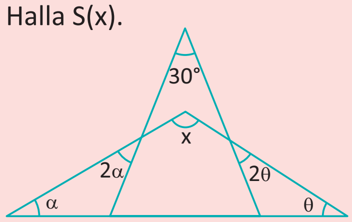
A) 40°　B) 32°　C) 26°
D) 28°　E) 20°

8. Calcula x.



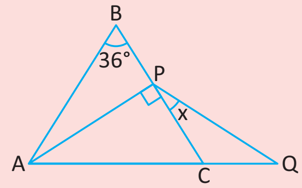
A) 16°　B) 17°　C) 18°
D) 22°　E) 20°

9. Halla S(x).



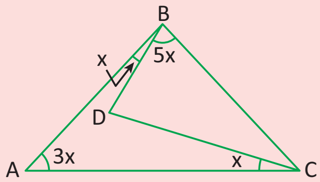
A) 20° B) 10° C) 50°
D) 60° E) 70°

10. Halla x, si AB = BC y PQ = AP.



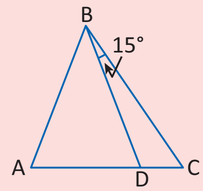
A) 50° B) 64° C) 60°
D) 54° E) 56°

11. Si AB = DC, calcula x.



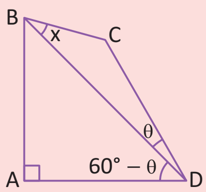
A) 18° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 10°

12. Si AB = BD = AC, calcula m∠BCA.



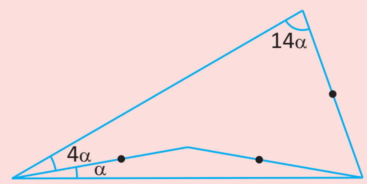
A) 50° B) 55° C) 65°
D) 45° E) 60°

13. Si AD = AB = CD, calcula x.



A) 15° B) 60° C) 45°
D) 30° E) 37°

14. Calcula α.



A) 10° B) 6° C) 8°
D) 9° E) 11°

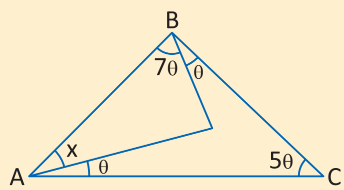
Claves

1. B
2. B
3. A
4. B
5. C
6. E
7. A
8. C
9. C
10. D
11. C
12. B
13. D
14. B

Reto



Halla el valor de x, si AB = BC.

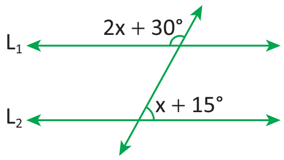


Rpta.: 40°

Refuerza practicando

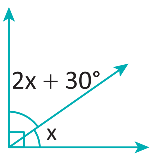
NIVEL 1

1. Halla x, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



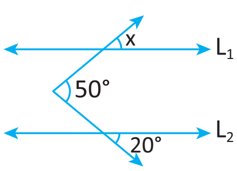
A) 37°
B) 60°
C) 30°
D) 53°
E) 45°

2. Calcula x.



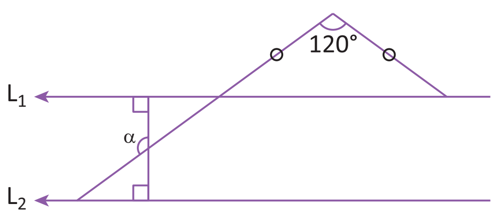
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

3. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



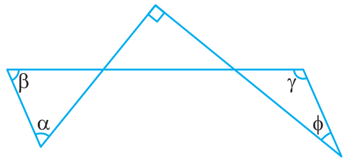
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

4. En la figura las rectas $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ son paralelas. Calcula α. **UNMSM 2000-I**



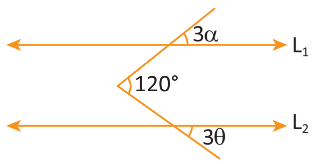
A) 100° B) 150° C) 120° D) 110° E) 130°

5. Halla el valor de: $\alpha + \beta + \gamma + \phi$



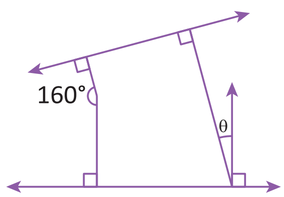
A) 180°
B) 150°
C) 300°
D) 270°
E) 200°

6. Para $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, halla $\alpha + \theta$.



A) 40°
B) 60°
C) 70°
D) 30°
E) 50°

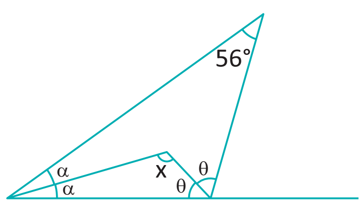
7. Calcula θ.



A) 10°
B) 20°
C) 35°
D) 45°
E) 53°

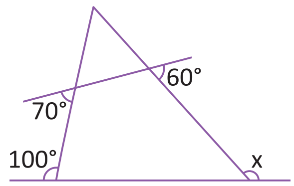
NIVEL 2

8. En la figura, halla x. **UNMSM 2005-II**



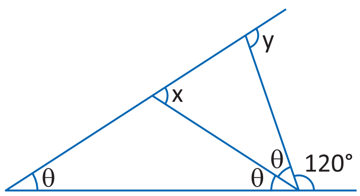
A) 115°
B) 110°
C) 124°
D) 118°
E) 125°

9. Halla x.



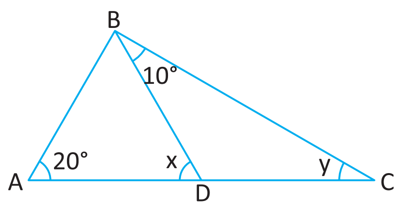
A) 120°
B) 130°
C) 100°
D) 140°
E) 110°

10. De la figura, calcula: x + y



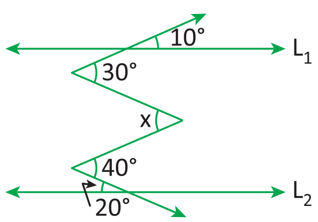
A) 160°
B) 120°
C) 150°
D) 170°
E) 140°

11. Si AB = AD, calcula y.



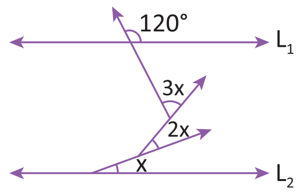
A) 60°
B) 45°
C) 30°
D) 70°
E) 15°

12. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



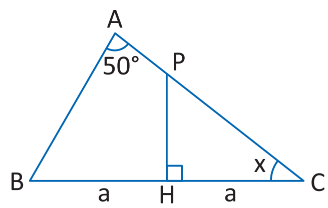
A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°

13. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 35°
E) 40°

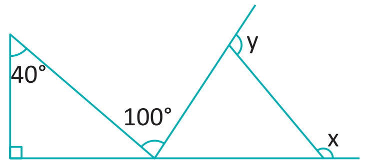
14. Calcula x, si AB = PC.



A) 15°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 35°

NIVEL 3

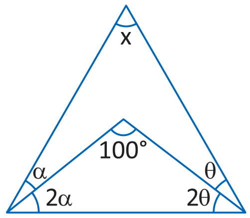
15. De la figura, calcula: x + y



A) 210°
B) 200°
C) 180°
D) 160°
E) 170°

16. Calcula el valor de x en:

UNMSM 2004-I

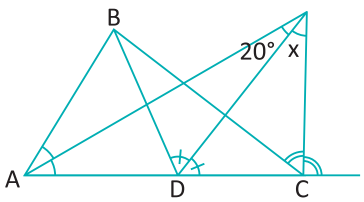


A) 80°
B) 50°
C) 40°
D) 30°
E) 60°

17. En un triángulo isósceles ABC (AB = AC), en la prolongación de $\overline{CB}$ se ubica el punto D, tal que AD = DC. Si m∠DAB = 30°, halla m∠ADB.

A) 50° B) 20° C) 30° D) 40° E) 15°

18. Si $\overline{BD}$ es bisectriz del ∠ABC, calcula x.

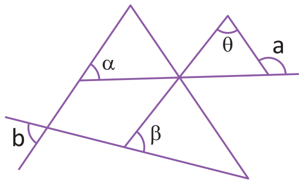


A) 10°
B) 30°
C) 20°
D) 60°
E) 40°

19. Dado un triángulo ABC, donde m∠ABC = 3 m∠BCA y, además, AC = 2(AB). Halla m∠BAC.

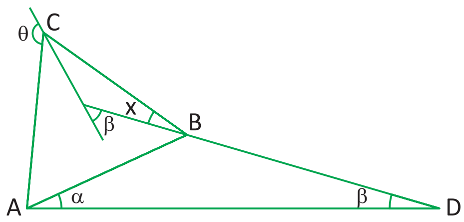
A) 120° B) 45° C) 60° D) 90° E) 40°

20. Calcula a + b, si: $\alpha + \beta + \theta = 50°$



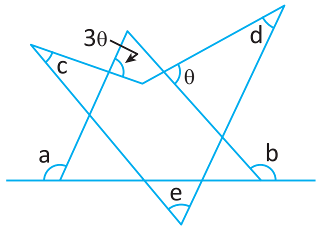
A) 50°
B) 25°
C) 30°
D) 60°
E) 15°

21. Calcula x si el triángulo ABC es equilátero y $\alpha + \theta = 140°$.



A) 36°
B) 10°
C) 30°
D) 40°
E) 20°

22. Según el gráfico, calcula θ si:
a + b + c + d + e = 340°



A) 25°
B) 10°
C) 15°
D) 30°
E) 50°

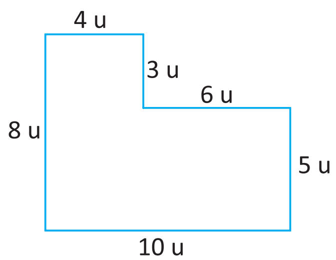
Claves

NIVEL 1	7. B	12. B	17. D
1. E	NIVEL 2	13. B	18. C
2. B	8. D	14. C	19. C
3. C	9. B	NIVEL 3	20. A
4. C	10. C	15. A	21. E
5. D	11. D	16. E	22. E
6. A			

Perímetros y áreas

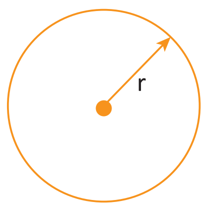
PERÍMETROS

- El perímetro (2p) de una figura geométrica es la suma de longitudes de todos los lados.



$2p = 8 + 4 + 3 + 6 + 5 + 10$
$2p = 36$ u

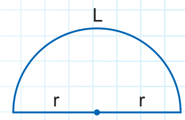
- La longitud de una circunferencia es:



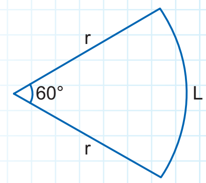
$L = 2\pi \cdot r$

Nota

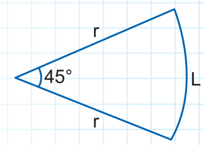
Casos particulares



$L = \pi r$



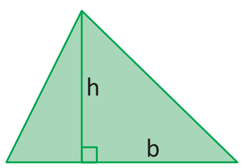
$L = \frac{\pi r}{3}$



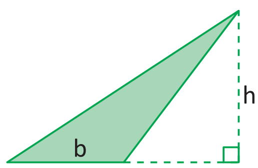
$L = \frac{\pi r}{4}$

ÁREAS

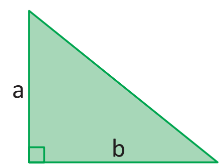
Áreas de regiones triangulares



$A = \frac{b \cdot h}{2}$

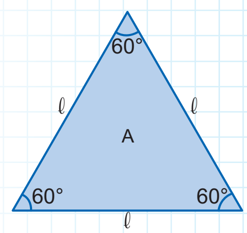


$A = \frac{b \cdot h}{2}$



$A = \frac{a \cdot b}{2}$

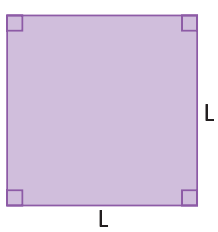
Nota



$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

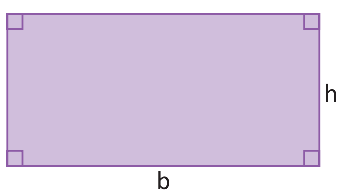
Áreas de regiones cuadrangulares

Cuadrado



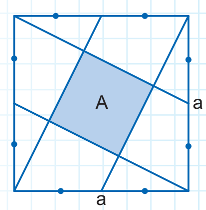
$A = L^2$

Rectángulo



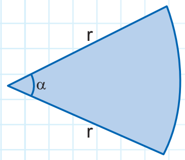
$A = b.h$

Nota



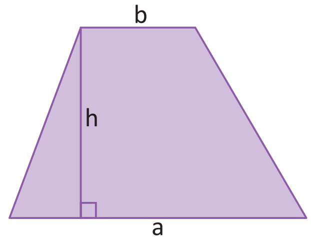
$A = \frac{1}{5}a^2$

Nota



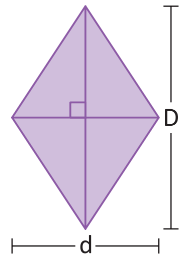
$A = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{360°}$

Trapecio



$A = \left(\frac{a + b}{2}\right) . h$

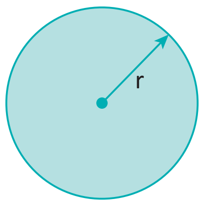
Rombo



$A = \frac{D . d}{2}$

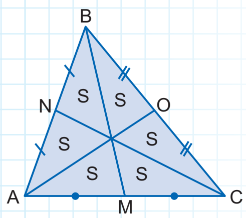
Área de regiones circulares

Círculo



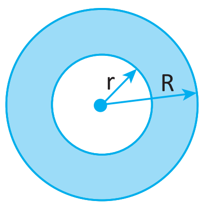
$A = \pi . r^2$

Nota



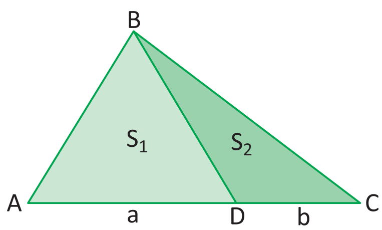
$\overline{BM}$; $\overline{CN}$ y $\overline{AO}$ son medianas.

Corona circular



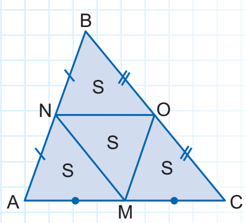
$A = \pi(R^2 - r^2)$

Relación de áreas

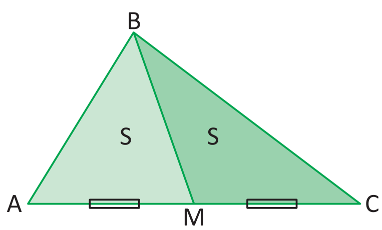


$\frac{A_{\triangle ABD}}{A_{\triangle DBC}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$

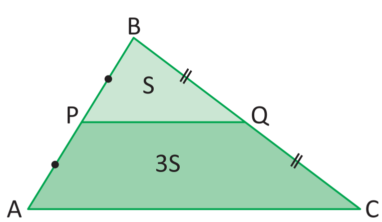
Nota



$\overline{MN}$; $\overline{NO}$ y $\overline{OM}$ son bases medias.



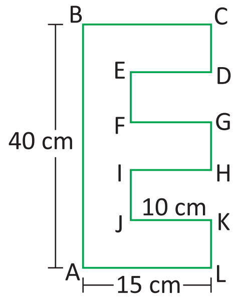
$A_{\triangle ABM} = A_{\triangle MBC} = S$



$A_{\square APQC} = 3A_{\triangle PBQ}$

Problemas resueltos

1 Halla el perímetro de la figura.



Resolución:

Del gráfico:

$2p = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JK + KL + AL$

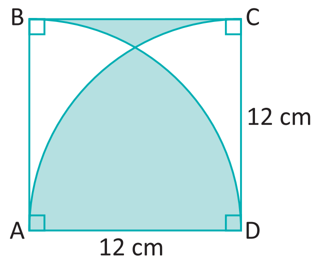
$= \underbrace{AB + CD + EF + GH + IJ + KL}_{40} + \underbrace{BC + AL}_{15+15} + \underbrace{ED + FG + IH + JK}_{10+10+10+10}$

$= 40 \quad + \quad 40 \quad + \quad 15 + 15 + 10 + 10 + 10 + 10$

$2p = 80 + 30 + 40$

$\therefore 2p = 150$ cm

2 Halla el perímetro de la región sombreada (A y D son centros de la circunferencia).



Resolución:

Del gráfico:

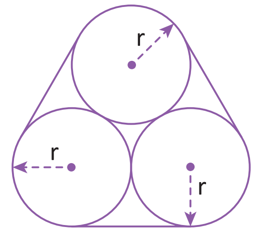
$2p = AD + BC + L_{\overset{\frown}{AC}} + L_{\overset{\frown}{BD}}$

$2p = 12 + 12 + \frac{2\pi.12}{4} + \frac{2\pi.12}{4}$

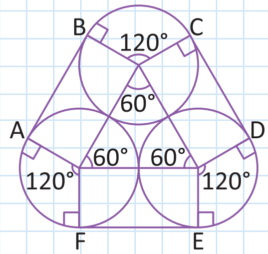
$2p = 24 + 12\pi$

$\therefore 2p = 12(\pi + 2)$ cm

3 Halla la longitud de la cadena que sirve para atar las 3 ruedas de la figura (r = 50 cm).



Resolución:



Del gráfico:

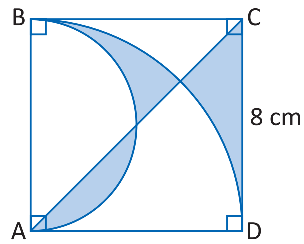
$\ell_{cadena} = m\overset{\frown}{AF} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{DE} + AB + CD + FE$

$\ell_{cadena} = \frac{2\pi.50}{3} + \frac{2\pi.50}{3} + \frac{2\pi.50}{3} + 100 + 100 + 100$

$= 100\pi + 300$

$\therefore \ell_{cadena} = 100(\pi + 3)$ cm

4 Si ABCD es un cuadrado, halla el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

Según el gráfico:

$2p = \ell_{\overset{\frown}{AB}} + \ell_{\overset{\frown}{BD}} + CD + AC$

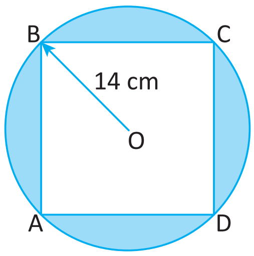
$= \frac{2\pi.4}{2} + \frac{2\pi.8}{4} + 8 + 8\sqrt{2}$

$= 4\pi + 4\pi + 8 + 8\sqrt{2}$

$= 8\pi + 8 + 8\sqrt{2}$

$\therefore 2p = 8(\pi + 1 + \sqrt{2})$ cm

5 Halla el área de la región sombreada. (ABCD es un cuadrado. O es el centro).



Resolución:

Según el gráfico:

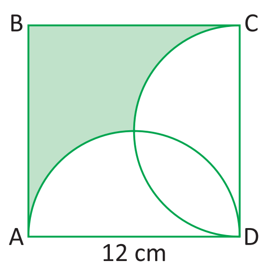
$A_{sombreada} = A_{\odot} - A_{\square}$

$= \pi \cdot 14^2 - \dfrac{28^2}{2}$

$= 196\pi - 392$

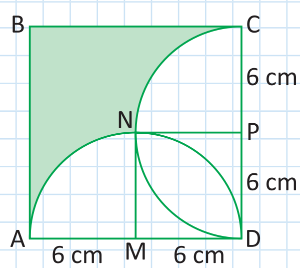
$= 196(\pi - 2)\ cm^2$

6 Halla el área de la región sombreada. (ABCD es un cuadrado. $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ son diámetros).



Resolución:

Para hallar el área pedida dividimos el cuadrado de la siguiente manera.



$A_{sombreada} = A_{\square ABCD} - (A_{\square MNPD} + A_{◿AMD} + A_{◿NPC})$

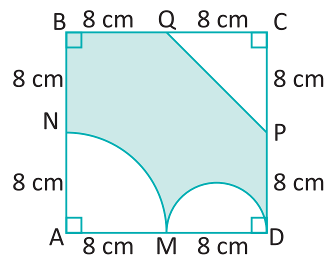
$= 12^2 - \left(6^2 + \dfrac{\pi.6^2}{4} + \dfrac{\pi.6^2}{4}\right)$

$= 144 - (36 + 9\pi + 9\pi)$

$= 108 - 18\pi$

$= 18(6 - \pi)\ cm^2$

7 Calcula el área de la región sombreada. $\overline{MD}$ es diámetro; A es centro.



Resolución:

Del gráfico:

$A_{sombreada} = A_{\square ABCD} - (A_{\triangle QCD} + A_{\frown MD} + A_{◿NAM})$

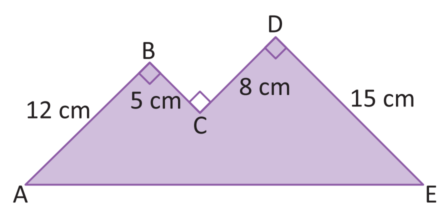
$A_{sombreada} = 16^2 - \left(\dfrac{8\,.\,8}{2} + \dfrac{\pi.4^2}{2} + \dfrac{\pi.8^2}{4}\right)$

$= 256 - (32 + 8\pi + 16\pi)$

$= 224 - 24\pi$

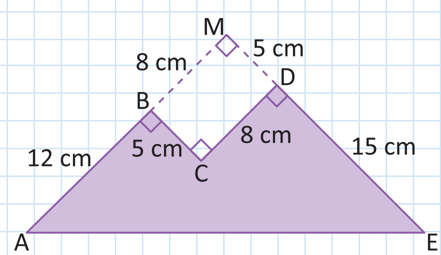
$= 8(28 - 3\pi)\ cm^2$

8 Halla el área de la figura sombreada.



Resolución:

Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ que se intersecan en M.



Luego:

$A_{sombreada} = A_{\triangle AME} - A_{\square BCDM}$

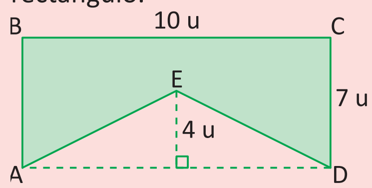
$= \dfrac{20.20}{2} - 8.5$

$= 200 - 40$

$= 160\ cm^2$

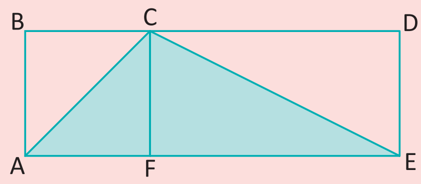
Actividades de razonamiento

1. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



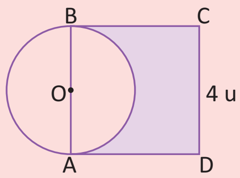
A) 45 u^2　B) 50 u^2　C) 35 u^2
D) 40 u^2　E) 30 u^2

2. Halla el área de la región sombreada, si ABCF es un cuadrado y FCDE es un rectángulo. (AB = 4 u; CD = 8 u).



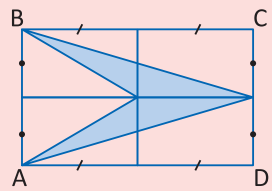
A) 32 u^2　B) 20 u^2　C) 36 u^2
D) 24 u^2　E) 30 u^2

3. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado.



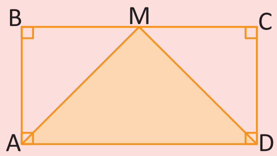
A) $(\pi + 2)\ u^2$　B) $(4\pi + 3)\ u^2$　C) $2(8 - \pi)\ u^2$
D) $(2\pi + 3)\ u^2$　E) $3(5 - \pi)\ u^2$

4. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo. (AB = 8 u; BC = 10 u).



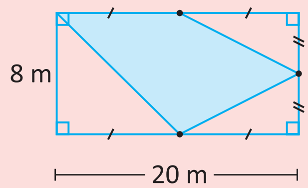
A) 10 u^2　B) 20 u^2　C) 25 u^2
D) 30 u^2　E) 15 u^2

5. Si el área de la región rectangular ABCD es 80 m^2, halla el área de la región triangular AMD.



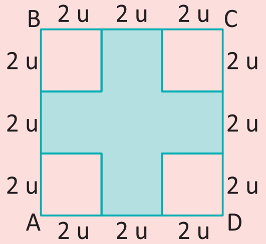
A) 60 m^2　B) 30 m^2　C) 50 m^2
D) 45 m^2　E) 40 m^2

6. Calcula el área de la región sombreada.



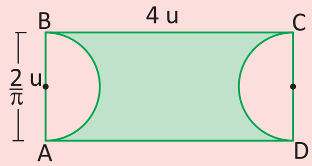
A) 80 m^2　B) 35 m^2　C) 40 m^2
D) 60 m^2　E) 20 m^2

7. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado.



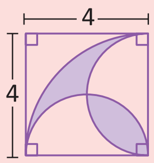
A) 24 u^2　B) 36 u^2　C) 16 u^2
D) 32 u^2　E) 20 u^2

8. Halla el perímetro de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



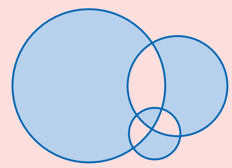
A) 10 u　B) 13 u　C) 8 u
D) 15 u　E) 12 u

9. Calcula el perímetro de la región sombreada.



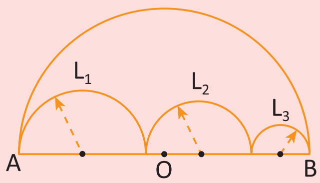
A) 5π B) 6π C) 8π
D) 7π E) 12π

10. Los radios de los círculos son 3; 2 y 1 cm, respectivamente. ¿Cuál es el perímetro de los sectores sombreados?



A) 6π cm B) 9π cm C) 12π cm
D) 18π cm E) 24π cm

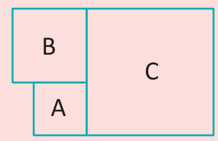
11. Calcula la suma de las longitudes de las semicircunferencias construidas sobre el diámetro AB = 4. O es centro.



A) π B) 2π C) 4π
D) 6π E) 3π

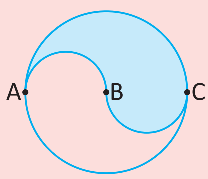
12. En la figura se muestran los cuadrados A, B y C.

Halla: $\dfrac{\text{Perímetro de B} + \text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de C}}$



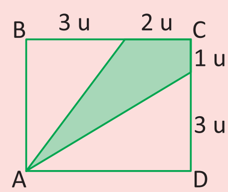
A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1
D) 4 E) $\dfrac{1}{8}$

13. Si $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ son semicircunferencias de radio 1 u, halla el área de la región sombreada. (B es centro de la circunferencia mayor).



A) 6π u^2 B) 2π u^2 C) π u^2
D) 4π u^2 E) 3π u^2

14. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



A) 9 u^2 B) 8 u^2 C) 6,5 u^2
D) 7,5 u^2 E) 7 u^2

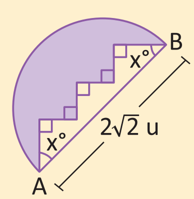
Claves

1. B	5. E	9. B	13. B
2. D	6. A	10. C	14. C
3. C	7. E	11. B	
4. B	8. A	12. C	

Reto



Halla el perímetro de la región sombreada. ($\overset{\frown}{AB}$ es una semicircunferencia).

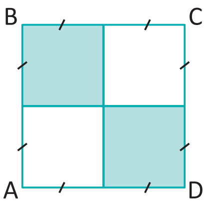


Rpta.: $(4 + \pi\sqrt{2})$ **u**

Refuerza practicando

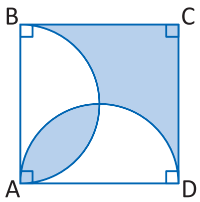
NIVEL 1

1. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 4 u.



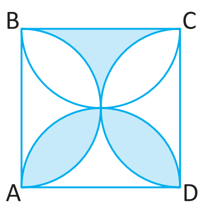
A) 16 u^2
B) 12 u^2
C) 5 u^2
D) 4 u^2
E) 8 u^2

2. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 6 u.



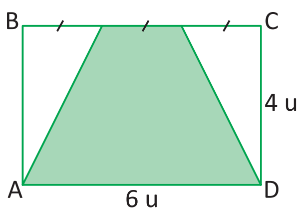
A) 15 u^2
B) 10 u^2
C) 18 u^2
D) 9 u^2
E) 20 u^2

3. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 12 u.



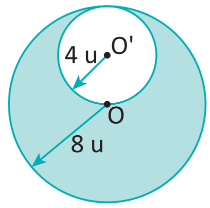
A) 15π u^2
B) 18π u^2
C) 20π u^2
D) 25π u^2
E) 10π u^2

4. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



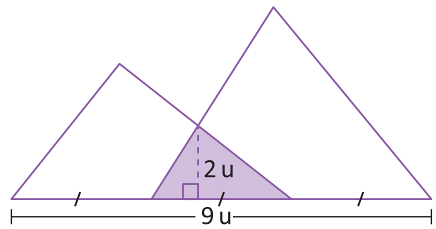
A) 15 u^2
B) 12 u^2
C) 10 u^2
D) 16 u^2
E) 20 u^2

5. Calcula el área de la región sombreada. (O y O' son centros de las circunferencias).



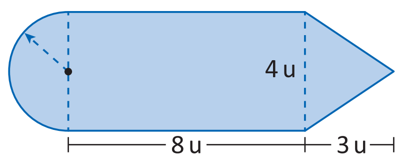
A) 10π u^2
B) 36π u^2
C) 24π u^2
D) 40π u^2
E) 48π u^2

6. Halla el área de la región sombreada.



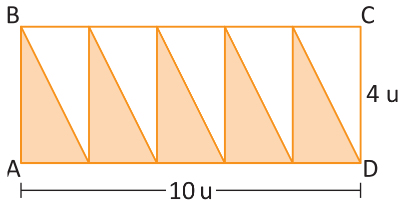
A) 6 u^2 B) 4 u^2 C) 7 u^2 D) 3 u^2 E) 5 u^2

7. Halla el área de la región sombreada.



A) $4(7 + 2\pi)$ u^2
B) $6(4 + \pi)$ u^2
C) $2(5 + \pi)$ u^2
D) $2(19 + \pi)$ u^2
E) $3(7 + \pi)$ u^2

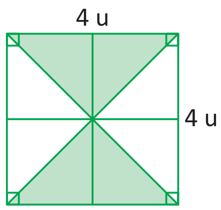
8. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



A) 18 u^2
B) 12 u^2
C) 16 u^2
D) 15 u^2
E) 20 u^2

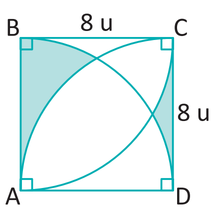
NIVEL 2

9. Halla el área de la región sombreada.



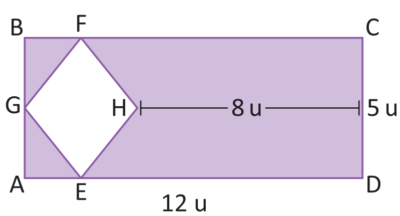
A) 10 u^2
B) 12 u^2
C) 16 u^2
D) 8 u^2
E) 4 u^2

10. Halla el área de la región sombreada.



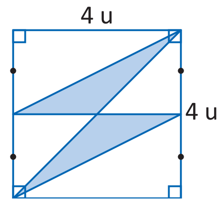
A) $8(2\pi - 5)$ u^2
B) $16(4 - \pi)$ u^2
C) $12(4 - \pi)$ u^2
D) $4(\pi + 4)$ u^2
E) $5(7 - \pi)$ u^2

11. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo y GFHE es un rombo.



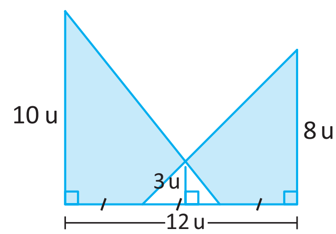
A) 50 u^2
B) 40 u^2
C) 45 u^2
D) 35 u^2
E) 30 u^2

12. Halla el área de la región sombreada.



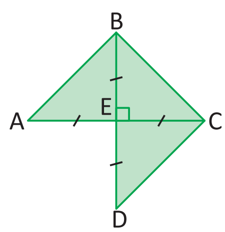
A) 12 u^2
B) 5 u^2
C) 3 u^2
D) 8 u^2
E) 4 u^2

13. Halla el área de la región sombreada.



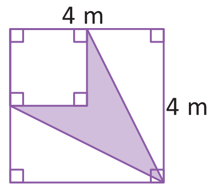
A) 50 u^2
B) 55 u^2
C) 36 u^2
D) 60 u^2
E) 40 u^2

14. Halla el área de la región sombreada (AE = 4 u).



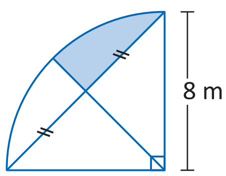
A) 24 u^2
B) 32 u^2
C) 16 u^2
D) 25 u^2
E) 20 u^2

(15) Halla el área de la región sombreada.



A) 16 m^2
B) 10 m^2
C) 8 m^2
D) 6 m^2
E) 4 m^2

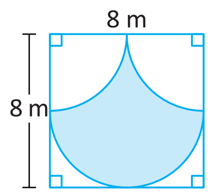
(16) Halla el área de la región sombreada.



A) $8(\pi - 2)$ m^2
B) $4(\pi - 2)$ m^2
C) $16(\pi - 4)$ m^2
D) $4(5 - \pi)$ m^2
E) $2(\pi - 8)$ m^2

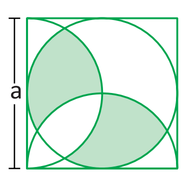
NIVEL 3

(17) Halla el área de la región sombreada.



A) 14 m^2
B) 16 m^2
C) 32 m^2
D) 40 m^2
E) 54 m^2

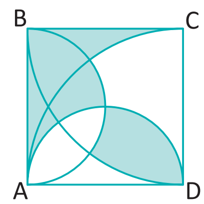
(18) Halla el área de la región sombreada.



A) $\pi a^2/2$
B) $\pi a^2/4$
C) $\pi a^2/6$
D) $\pi a^2/8$
E) $\pi a^2/3$

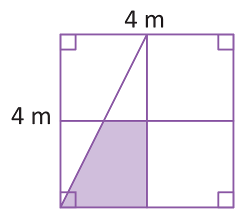
(19) En la figura, AB y AD son diámetros de círculos; C y D son centros de arcos de circunferencias. ¿Qué parte del área del cuadrado ABCD es el área de la región sombreada?

UNMSM 2008-I



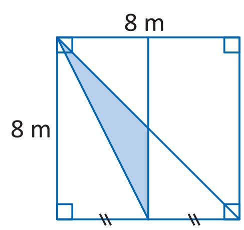
A) 1/2
B) 1/4
C) 3/5
D) 3/4
E) 1/3

(20) Halla la relación entre el área de la región sombreada y la región no sombreada.



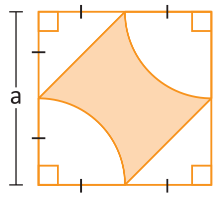
A) 3/13
B) 6/13
C) 4/13
D) 5/13
E) 1/13

(21) Halla el área de la región sombreada.



A) 8 m^2
B) 16 m^2
C) 18 m^2
D) 22 m^2
E) 36 m^2

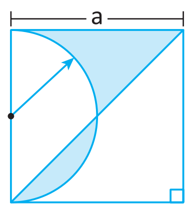
(22) Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2(5-\pi)}{2}$ B) $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$ C) $\frac{a^2(6-\pi)}{8}$

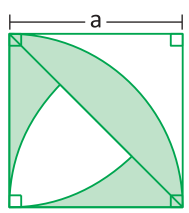
D) $\frac{a^2(8-\pi)}{3}$ E) $a^2(6-\pi)$

(23) Halla el área de la región sombreada.



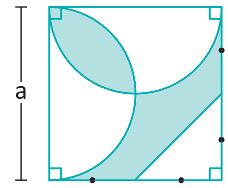
A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{4}$ D) $\frac{3a^2}{8}$ E) $\frac{3a^2}{5}$

(24) Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{4}$ D) $\frac{a^2}{5}$ E) $\frac{a^2}{6}$

(25) Halla el área de la región sombreada.

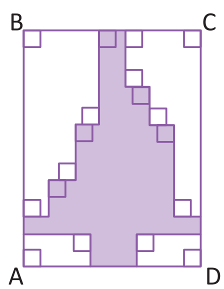


A) $\frac{3}{4}a^2$ B) $\frac{5}{2}a^2$ C) $\frac{2}{3}a^2$

D) $\frac{1}{5}a^2$ E) $\frac{3}{8}a^2$

(26) En la figura, AB = 8 cm y AD = 6 cm. Halla el perímetro de la región sombreada.

UNMSM 2006-II



A) 18 cm
B) 22 cm
C) 28 cm
D) 25 cm
E) 20 cm

Claves

NIVEL 1	8. E	15. E	22. C
1. E	NIVEL 2	16. A	23. C
2. C	9. D	NIVEL 3	24. A
3. B	10. B	17. C	25. E
4. D	11. A	18. D	26. C
5. E	12. E	19. A	
6. D	13. D	20. A	
7. D	14. A	21. A	

Análisis combinatorio

FACTORIAL DE UN NÚMERO

El factorial de un número entero positivo (n) está definido como el producto de los enteros consecutivos desde 1 hasta el mismo número "n".

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

Ejemplos:

$1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40\,320$

Propiedad

$$n! = n \times (n-1)!$$

Ejemplos:

1. Efectúa:

$$E = \frac{9!}{6! \times 3!} + \frac{7!}{5! \times 2!}$$

Resolución:

$$E = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1}$$

$$E = 84 + 21$$

$$E = 105$$

2. Simplifica:

$$S = \sqrt{\frac{(m+2)!m!}{(m-1)! \times (m+1)!} + 1}$$

Resolución:

$$S = \sqrt{\frac{(m+2)(m+1)!m(m-1)!}{(m-1)!(m+1)!} + 1}$$

$$S = \sqrt{(m+2)m + 1}$$

$$S = \sqrt{m^2 + 2m + 1}$$

$$S = \sqrt{(m+1)^2}$$

$$S = m + 1$$

3. Halla:

$$G = \frac{24! \times 3! \times 13}{24! + 25!}$$

Resolución:

$$G = \frac{24! \times 3 \times 2 \times 1 \times 13}{24! + 25 \times 24!}$$

$$G = \frac{24! \times 3 \times 2 \times 13}{24!(1+25)}$$

$$G = \frac{3 \times 2 \times 13}{26}$$

$$G = 3$$

4. Calcula:

$$T = \frac{(x+3)! + (x+4)! + (x+5)!}{(x+3)! + (x+4)!}$$

Resolución:

$$T = \frac{(x+3)! + (x+4)(x+3)! + (x+5)(x+4)(x+3)!}{(x+3)! + (x+4)(x+3)!}$$

$$T = \frac{(x+3)!\left[1 + (x+4) + (x+5)(x+4)\right]}{(x+3)!\left(1 + (x+4)\right)}$$

$$T = \frac{(x+5) + (x+5)(x+4)}{(x+5)}$$

$$T = \frac{(x+5)\left[1 + (x+4)\right]}{(x+5)} = x + 5$$

Atención

Otra forma menos usual de representar el factorial de un número es la siguiente:

$\underline{|n}$

La cual es equivalente a n!



Nota

Por convención:
0! = 1

Importante

Se puede expresar el factorial de un número en términos de otro factorial menor.

Ejemplo:

$8! = 8 \times 7!$

$8! = 8 \times 7 \times 6!$

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$



PRINCIPIOS DE CONTEO

Principio de adición

Si el suceso A puede realizarse de m maneras y el suceso B, de n maneras, y no se pueden realizar los dos sucesos simultáneamente, entonces el suceso A o el suceso B se pueden realizar de (m + n) maneras.

Ejemplo:
Una persona decide viajar a Cuzco, si lo hace por tierra puede elegir entre 7 empresas de transporte y si va por vía aérea puede elegir entre 6 compañías de aviación. ¿De cuántas maneras puede realizar el viaje dicha persona?

Resolución:
Es obvio que si viaja por tierra no podrá hacerlo por aire, es decir son sucesos que no ocurren simultáneamente, entonces:

n.° de maneras = 7 + 6 = 13

Por tierra → 7

Por aire → 6

Importante

$V_3^7 = \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{3\text{ factores}} = 210$

$V_4^{10} = \underbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}_{4\text{ factores}} = 5040$

$V_5^{13} = \underbrace{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}_{5\text{ factores}}$

$= 154\,440$



Principio de multiplicación

Si el suceso A se puede realizar de m maneras y el suceso B se puede realizar de n maneras, entonces los sucesos A y B se pueden realizar en forma conjunta de m × n maneras siempre que se efectúe uno después del otro.

Ejemplo:
Ana tiene 3 blusas diferentes y 2 faldas también distintas. ¿De cuántos modos diferentes se puede vestir Ana utilizando solo una prenda de cada tipo?

Resolución:
Ana puede usar una blusa con cualquiera de las dos faldas, luego con las 3 blusas se podrá vestir de:

$$3 \times 2 = 6 \text{ maneras}$$

VARIACIONES

Se denomina variaciones de n elementos tomados de r en r al total de grupos de r elementos cada uno, que pueden formarse con los n elementos, de tal manera que cada grupo se diferencie de otro en por lo menos un elemento, o por el orden en el cual se han dispuesto sus elementos.

$$\boxed{V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}} \;;\; 0 < r \leq n$$

Ejemplos:

- $V_3^7 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$

- $V_4^{10} = \dfrac{10!}{(10-4)!} = \dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 5040$

- $V_5^{13} = \dfrac{13!}{(13-5)!} = \dfrac{13!}{8!} = \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = 154\,440$

COMBINACIONES

Se denomina combinaciones de n elementos tomados de r en r al total de grupos de r elementos cada uno, que pueden formarse con los n elementos, de tal manera que cada grupo se diferencie de otro en por lo menos un elemento.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} \qquad 0 < r < n$$

Ejemplos:

- $C_3^6 = \dfrac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \dfrac{6!}{3! \times 3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$
- $C_5^8 = \dfrac{8!}{(8-5)! \times 5!} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56$
- $C_6^{10} = \dfrac{10!}{(10-6)! \times 6!} = \dfrac{10!}{4! \times 6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 210$
- $C_7^{12} = \dfrac{12!}{(12-7)! \times 7!} = \dfrac{12!}{5! \times 7!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 792$

Importante

$C_3^6 = \dfrac{\overbrace{6 \times 5 \times 4}^{\text{3 factores}}}{1 \times 2 \times 3} = 20$

$C_5^8 = \dfrac{\overbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}^{\text{5 factores}}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 56$

$C_6^{10} = \dfrac{\overbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}^{\text{6 factores}}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 210$



PERMUTACIONES

Es un arreglo u ordenación que se puede formar con todos los elementos disponibles de un conjunto.

Permutación lineal

Se denomina así cuando se toman todos los elementos del conjunto para ordenarlos o permutarlos.

$$P_n = n!$$

Ejemplos:

- $P_6 = 6! = 720$
- $P_8 = 8! = 40\,320$
- $P_9 = 9! = 362\,880$

Permutación circular

Es un arreglo u ordenación de elementos diferentes alrededor de un objeto, en estas ordenaciones no hay primer ni último elemento por hallarse todos en una línea cerrada.

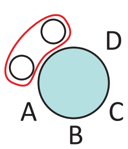
$$PC_n = (n-1)!$$

Ejemplos:

- $PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$
- $PC_8 = (8-1)! = 7! = 5040$
- $PC_{10} = (10-1)! = 9! = 362\,880$

Aplicación:

Alrededor de una mesa circular hay 8 sillas ubicadas simétricamente. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 6 amigos, si las dos sillas desocupadas siempre deben estar juntas?



Se puede considerar las dos sillas desocupadas como un elemento. Entonces, el número de maneras distintas en que 6 amigos se pueden sentar alrededor de una mesa circular con 8 sillas disponibles es:

$PC_5 = (5-1)! = 4! = 24$

Problemas resueltos

1 Determina el valor de:

$$A = \frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} + ... + \frac{10!}{9!}$$

Resolución:

$$A = \frac{2.\,1!}{1!} + \frac{3.\,2!}{2!} + \frac{4.\,3!}{3!} + ... + \frac{10.\,9!}{9!}$$

$A = 2 + 3 + 4 + ... + 10$

$A = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10) - 1$

Sabemos: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$A = \frac{10\,.\,11}{2} - 1$$

$A = 54$

2 Halla x, si:

$$\frac{(x+3)!(x+5)!}{(x+3)! + (x+4)(x+3)!} = 720$$

Resolución:

$$\frac{(x+5)!}{1+(x+4)} = 720$$

$$\frac{(x+5)!}{x+5} = 6!$$

$$\frac{(x+5)(x+4)!}{(x+5)} = 6!$$

$(x + 4)! = 6! \Rightarrow x + 4 = 6$

$\therefore x = 2$

3 Halla n, si: $C_2^n = 21$

Resolución:

$$\frac{n!}{(n-2)!\,.\,2!} = 21$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,.\,2} = 21$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 21$$

$n(n - 1) = 42 = 7\,.\,6$

$\Rightarrow n = 7$

4 ¿Cuántas banderas bicolores se pueden diseñar con telas de 5 colores? (Forma vertical).

Resolución:

Analicemos el problema; como al pintar una franja de la bandera de un color no podemos usar ese mismo color nuevamente ya que debe ser bicolor, tenemos:

5 colores $\times$ 4 colores = 20

Luego, se pueden pintar 20 banderas bicolores.

Forma práctica:

$$V_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20 \text{ banderas.}$$

5 ¿De cuántas maneras se pueden arreglar a todas las vocales en una fila?

Resolución:

Vocales: a; e; i; o; u

$P_5 = 5! = 120$

Se pueden arreglar de 120 maneras distintas.

6 Con seis pesas de 1; 2; 5; 10; 20 y 50 kg, ¿cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse, tomándolas de tres en tres?

Resolución:

n.° total de pesas: 6

n.° de pesas en cada grupo: 3

$$C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!\,.\,3!} = \frac{6.\,5.\,4.\,3!}{3!\,.\,3!} = 20$$

7 Se tiene 4 frutas diferentes. ¿Cuántos sabores distintos se podrán obtener de todas las maneras posibles?

Resolución:

De todas las maneras posibles será combinando cuatro, tres, dos y una fruta.

$$C_4^4 + C_3^4 + C_2^4 + C_1^4 = 1 + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!\,2!} + 4$$

$$= 1 + \frac{4\,.\,3!}{3!} + \frac{4\,.\,3\,.\,2!}{2!\,.\,2} + 4$$

$$= 1 + 4 + 6 + 4 = 15$$

Se podrán obtener 15 sabores distintos.

8 Una persona tiene para vestirse 5 pantalones, 4 camisas y 3 pares de zapatos. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá vestir?

Resolución:

La cantidad de maneras diferentes en que una persona puede vestirse con 5 pantalones, 4 camisas y 3 pares de zapatos es:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Luego, se puede vestir de 60 maneras diferentes.

9 En una reunión de directorio se ubican alrededor de una mesa circular, el presidente, vicepresidente y 5 gerentes. ¿De cuántas maneras se podrán ubicar?

Resolución:

Como se trata de una mesa circular, estamos ante una permutación circular.

Calculamos la permutación circular para 7 elementos:

$PC_7 = (7 - 1)! = 6! = 720$

10 Se tienen 9 jugadoras de vóley, para formar un equipo de 6 jugadoras. ¿Cuántos equipos diferentes se podrán formar?

Resolución:

Se trata de una variación de 9 elementos tomados de 6 en 6.

$$V_6^9 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!}$$

$$= 60\,480$$

11 La figura muestra 6 cajas de diferentes colores: rojo, azul, verde, morado, negro y marrón. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá apilar las 6 cajas en una columna, si en ningún caso la caja verde debe ir en la base?



Resolución:

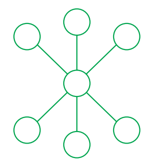
n.° de maneras de apilar sin que la caja verde esté en la base	=	n.° total de maneras de apilar	–	n.° de maneras de apilar estando la caja verde en la base

$= P_6 - P_5$

$= 6! - 5!$

$= 600$ maneras

12 Rubén desea colocar una letra distinta en cada uno de los 7 círculos mostrados en la figura. Si tiene 8 letras distintas para escoger, ¿de cuántas maneras diferentes lo podrá hacer?

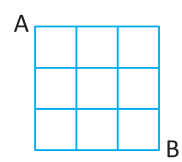


Resolución:

Como se debe tener en cuenta el orden de las letras, entonces:

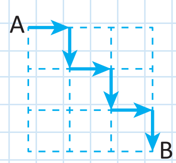
n.° total de maneras $= V_7^8 = 40\,320$

13 Determina el número de trayectorias que hay desde el punto A al punto B. Cada trayectoria está formada por tramos (determinada por una pareja de puntos) que van hacia la derecha o hacia abajo.



Resolución:

Del enunciado:



Se tienen:

- (→) : 3 (se repite 3 veces)
- (↓) : 3 (se repite 3 veces)

Para graficar las trayectorias desde A hasta B, se debe tomar en cuenta el orden de colocación de las flechas: ↑ y →

Luego:

n.° de trayectorias desde A hasta B $= P_{3;\,3}^{6} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$

Actividades de razonamiento

1. Un grupo de amigos desean ir de viaje a Cusco y observan que por auto hay 7 rutas y por tren hay 5 rutas. ¿De cuántas maneras pueden llegar a su destino?

A) 7 B) 5 C) 12
D) 42 E) 35

2. Rosa tiene 7 blusas, 4 faldas y 3 zapatos. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir Rosa?

A) 84 B) 56 C) 70
D) 105 E) 205

3. Se desea confeccionar una bandera usando tres colores: rojo, azul y verde en franjas verticales. ¿De cuántas maneras será posible hacerlo?

A) 6 B) 8 C) 12
D) 3 E) 10

4. ¿De cuántas maneras se podrán colocar 6 libros en una vitrina?

A) 360 B) 720 C) 120
D) 90 E) 60

5. ¿Cuántas palabras se puede formar con las letras de la palabra LÁPIZ sin importar si estas tienen sentido?

A) 120 B) 130 C) 240
D) 210 E) 320

6. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa circular?

A) 24 B) 42 C) 12
D) 120 E) 130

7. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 niños y una niña en una fila, si la niña debe estar sentada al medio de los niños?

A) 42 B) 84 C) 3
D) 67 E) 24

8. Si 6 chicos van al teatro y disponen de 6 butacas para sentarse, ¿de cuántas maneras distintas podrán sentarse?

A) 240 B) 120 C) 360
D) 144 E) 720

9. ¿De cuántas maneras pueden elegir 3 personas un helado si hay 7 sabores y cada una escoge un sabor diferente?

A) 210 B) 420 C) 30
D) 28 E) 11

10. Si 4 amigos van al cine y encuentran una hilera de 10 butacas, ¿de cuántas maneras distintas se podrán sentar?

A) 5042 B) 2050 C) 1024
D) 5621 E) 5040

11. Simplifica:

$$S = \frac{40!}{38!}$$

A) 40 B) 1500 C) 1560
D) 1460 E) 1400

12. Reduce:

$$E = \frac{15! + 16!}{15! + 14!}$$

A) $\frac{255}{16}$ B) $\frac{200}{17}$ C) $\frac{250}{13}$
D) $\frac{255}{7}$ E) $\frac{55}{7}$

13. Reduce:

$$\frac{C_4^{31} + C_5^{31} + C_6^{32} + C_7^{33}}{C_8^{34}}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{8}{27}$
D) C_7^{33} E) C_9^{35}

14. Halla la suma de soluciones de la ecuación:
$(4x - 3)! = 1$

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{7}{4}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

Claves

1. C
2. A
3. A
4. B
5. A
6. A
7. E
8. E
9. A
10. E
11. C
12. A
13. C
14. C

Reto



Calcula el valor de "x", en:

$$\frac{(x+2)! + (x+1)! + x!}{(x+1)! + x!} = \frac{x!}{x}$$

Rpta.: 4

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Cuántas palabras de 4 letras se podrán formar con las letras de la palabra COMER, sin importar si estas tienen sentido o no?

   A) 8 B) 24 C) 20 D) 80 E) 120

2. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra LETRAS?

   A) 180 B) 420 C) 540 D) 630 E) 720

3. ¿Cuántas palabras se pueden formar con todas las letras de la palabra MUNDIAL?

   A) 6210 B) 5040 C) 720
   D) 5500 E) 6200

4. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 4 objetos de un total de 8?

   A) 120 B) 60 C) 35 D) 180 E) 70

5. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se pueden determinar con las cifras: 2; 3; 4; 7; 8; 9?

   A) 120 B) 180 C) 100 D) 240 E) 360

6. ¿Cuántos números se pueden formar con todas las cifras del número 7452?

   A) 16 B) 24 C) 40 D) 120 E) 60

7. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 niños en una fila?

   A) 36 B) 360 C) 720 D) 630 E) 540

8. Lucho, Beto y Coco suben al ómnibus que los llevará a casa. Si solamente encontraron 3 asientos vacíos, ¿de cuántas formas diferentes se pudieron haber sentado?

   A) 3 B) 2 C) 12 D) 9 E) 6

9. Seis amigos deciden ir de campamento. Por la noche encendieron una fogata. Si todos se van a sentar alrededor de ella, ¿de cuántas maneras se podrán ubicar?

   A) 720 B) 360 C) 36 D) 12 E) 120

NIVEL 2

10. En un bazar venden 7 vestidos diferentes. Una señora solo tiene para 4 vestidos. ¿De cuántas maneras puede hacer la elección?

    A) 350 B) 620 C) 840 D) 420 E) 35

11. Se necesitan 3 cocineros para un restaurante y se presentan 10 cocineros. ¿De cuántas maneras se podrá hacer la elección?

    A) 120 B) 60 C) 180 D) 150 E) 90

12. Un examen tiene 10 preguntas de las cuales un estudiante debe escoger 8. ¿De cuántas maneras podrá hacer la elección de las preguntas?

A) 120 B) 90 C) 36 D) 45 E) 35

13. Una orquesta musical tiene un repertorio de 18 canciones. En una presentación debe interpretar 3 canciones, ¿de cuántas maneras podrá escoger las 3 canciones?



A) 496 B) 362 C) 820 D) 816 E) 498

14. Se tienen 6 frutas diferentes y se quiere preparar jugos surtidos con 3 frutas diferentes. ¿Cuántos jugos se pueden preparar?

A) 48 B) 36 C) 24 D) 20 E) 12

15. Cuatro amigos llegan al cine y encuentran una fila de 7 asientos vacíos. ¿De cuántas maneras pueden ocupar 4 asientos?

A) 840 B) 28 C) 35 D) 210 E) 180

16. Cuatro amigos llegan a una fiesta donde hay 7 chicas sin pareja. ¿De cuántas maneras pueden escoger los amigos a sus parejas?

A) 840 B) 28 C) 35 D) 210 E) 180

17. ¿De cuántas formas podrán ubicarse 5 personas en una conferencia si solamente quedan 3 asientos vacíos?

A) 60 B) 15 C) 8 D) 10 E) 20

18. ¿Cuántas banderas de 3 franjas verticales de color diferente se pueden confeccionar si se tiene 7 telas de color diferente?

A) 120 B) 420 C) 360 D) 210 E) 180

NIVEL 3

19. Elsa no se acuerda las claves de su tarjeta EFECTIBANK; solo sabe que era un número de 4 cifras diferentes donde no estaba el cero. ¿Cuántos intentos debe hacer como máximo para dar con su clave?



A) 1985 B) 1780 C) 2724
D) 4050 E) 3024

20. Con las cifras 2; 3; 5; 7; 8; 9, ¿cuántos números racionales diferentes se puede determinar?

A) 25 B) 30 C) 12 D) 36 E) 42

21. Con las cifras 4; 5; 6; 7 y 8, ¿cuántos números impares, de tres cifras diferentes, se pueden formar?

A) 8 B) 12 C) 24
D) 16 E) 32

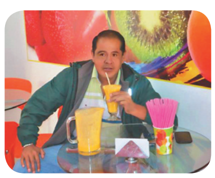
22. Un padre tiene 5 hijos y 2 dulces diferentes. ¿De cuántas maneras podrá entregar los 2 dulces a 2 de sus hijos?

A) 60 B) 240 C) 120
D) 42 E) 20

23. Un padre tiene 2 hijos y 5 dulces diferentes. ¿De cuántas maneras podrá entregar 2 dulces a sus 2 hijos?

A) 120 B) 20 C) 60
D) 36 E) 42

24. En una juguería se tienen las siguientes frutas: papaya; carambola; plátano, piña, fresa; lúcuma y sandía. Se quiere saber cuántos tipos diferentes de jugos se pueden preparar dado que cada uno debe estar hecho a base de 3 frutas y que la carambola y la fresa nunca deben combinarse, ya que el jugo sería demasiado ácido.



A) 32 B) 30 C) 36 D) 45 E) 72

25. Alrededor de una mesa de 5 asientos se quiere ubicar 2 niños y 2 niñas de modo que el asiento vacío esté entre las niñas. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá hacer?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

26. ¿Cuántos paralelogramos en total se pueden formar al cortar un sistema de 7 rectas paralelas con otro sistema de 4 rectas paralelas?

A) 132 B) 51 C) 126
D) 142 E) 168

27. ¿De cuántas maneras diferentes puede seleccionarse un grupo de 4 o más personas, si hay 10 personas disponibles?

A) 848 B) 956 C) 555
D) 959 E) 813

Claves

NIVEL 1	8. E	15. A	22. E
1. E	9. E	16. A	23. B
2. E	NIVEL 2	17. A	24. B
3. B	10. E	18. D	25. D
4. E	11. A	NIVEL 3	26. C
5. E	12. D	19. E	27. A
6. B	13. D	20. B	
7. C	14. D	21. C	

Probabilidades

CONCEPTOS PREVIOS

Experimento aleatorio (ε)

Es aquel experimento que depende del azar. En estos experimentos no se puede señalar con precisión el resultado que se obtendrá.

Ejemplos:

- Lanzar un dado y observar el resultado.
- Lanzar dos monedas una seguida de la otra y observar el resultado.

Atención

Cada posible resultado de un experimento aleatorio se denomina punto muestral.



Espacio muestral (Ω)

Es un conjunto asociado a un experimento aleatorio, cuyos elementos son todos los posibles resultados del experimento señalado.

Ejemplos:

- Del experimento de lanzar un dado, su espacio muestral sería:
  $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- Del experimento de lanzar dos monedas una seguida de la otra, su espacio muestral sería:
  $\Omega_2 = \{SS; SC; CS; CC\}$

Evento

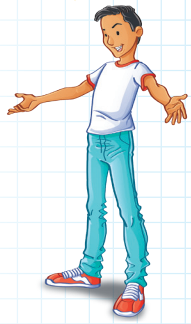
Se llama así a cualquier subconjunto de un espacio muestral. Se representa por una letra mayúscula.

Ejemplo:
Del experimento de lanzar dos monedas una seguida de la otra, algunos eventos son:

- A: obtener por lo menos un sello.
  $A = \{SS; SC; CS\}$
- B: obtener por lo menos una cara.
  $B = \{SC; CS; CC\}$
- C: obtener dos figuras iguales.
  $C = \{SS; CC\}$

Importante

- Un evento que consta de todos los puntos muestrales de un espacio muestral, se denomina evento seguro.
- Un evento que no presenta puntos muestrales en un espacio muestral, se denomina evento imposible.



Eventos mutuamente excluyentes

Dados los eventos A y B, se dice que ellos son mutuamente excluyentes si y solo si $A \cap B = \varnothing$.

Eventos independientes

Dados dos eventos A y B se dice que ellos son independientes si la ocurrencia de A no afecta el hecho de que ocurra simultáneamente o sucesivamente B.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La probabilidad de un evento A, denotado por P(A), está dada por la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables del evento A}}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplo:
Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea un número primo?

Resolución:

ε: lanzar un dado

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

A: el resultado sea un número primo

$A = \{2; 3; 5\} \Rightarrow n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Importante

La probabilidad también se puede expresar como un porcentaje, así:

$\frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$



Propiedades

Si un evento A es definido en el espacio muestral Ω, entonces:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, es decir $A \cap B = \varnothing$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si A y B son eventos no excluyentes, es decir $A \cap B \neq \varnothing$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son eventos independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

Probabilidad condicional

La probabilidad de un evento B, dado que ha ocurrido el evento A, es denotado por P(B/A) y es por definición:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ ; \ P(A) > 0$$

Observación

- Si $P(A) = 0 \Rightarrow A = \varnothing$
  A es un evento imposible.
- Si $P(A) = 1 \Rightarrow A = \Omega$
  A es un evento seguro.



Ejemplo:
Al lanzar un dado, si el resultado es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 3?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

B: el resultado es mayor que 3; $B = \{4; 5; 6\}$

A: el resultado es par.

$A = \{2; 4; 6\} \Rightarrow n(A) = 3$

$A \cap B$: el resultado es mayor que 3 y par.

$A \cap B = \{4; 6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

Luego:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Problemas resueltos

1 Al lanzar un dado sobre una mesa, ¿cuál es la probabilidad de obtener un resultado mayor que 4?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Los casos favorables son: $A = \{5; 6\}$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ La probabilidad de obtener un resultado mayor que 4 es: $\dfrac{1}{3}$

2 En una caja se tienen 8 lapiceros rojos, 6 azules y 3 blancos; si se extrae uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Resolución:

ε: extraer un lapicero.

A: el lapicero sea de color azul $\Rightarrow n(A) = 6$

$n(\Omega) = 8 + 6 + 3 = 17$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{17}$

3 ¿Cuál es la probabilidad que la suma sea seis al lanzar dos dados?

Resolución:

A: la suma sea 6

$A = \{(1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1)\}$

$\Rightarrow n(A) = 5$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{6 \times 6} = \dfrac{5}{36}$

4 En una caja hay 30 fichas numeradas del 1 al 30, todas del mismo tamaño y forma. Si se extrae una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea múltiplo de 5 o 7?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; ...; 30\} \Rightarrow n(\Omega) = 30$

A: sea múltiplo de 5 o 7.

$A = \{5; 7; 10; 14; 15; 20; 21; 25; 28; 30\} \Rightarrow n(A) = 10$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

5 Manuel rinde un examen en el cual la calificación es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una nota mayor que 15?

Resolución:

$\Omega = \{0; 1; 2; 3; ...; 20\} \Rightarrow n(\Omega) = 21$

A: obtener una nota mayor que 15.

$A = \{16; 17; 18; 19; 20\} \Rightarrow n(A) = 5$

$\therefore P(A) = \dfrac{5}{21}$

6 ¿Cuál es la probabilidad que al lanzar dos dados el número que muestran sus caras superiores sea mayor que ocho?

Resolución:

$A = \{(3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)\}$

$\Rightarrow n(A) = 10$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

7 Se tienen 40 bolas enumeradas consecutivamente del 1 al 40; si se extrae una de ellas, ¿cuál es la probabilidad que se obtenga una bola con un número de dos cifras?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; ...; 40\}$

C: obtener número de dos cifras.

$C = \{10; 11; 12; ...; 40\} \Rightarrow n(C) = 31$

Por lo tanto: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{31}{40}$

8 Una ficha, cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4, es lanzada 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 11?

Resolución:

ε: lanzar una ficha 3 veces.

Ω: $\{333; 334; 343; 344; 433; 434; 443; 444\} \Rightarrow n(\Omega) = 8$

B: obtener un total de 11.

B: $\{344; 434; 443\} \Rightarrow n(B) = 3$

$\therefore P(B) = \dfrac{3}{8}$

9 La probabilidad de que Paolo compre chocolates es 0,3 y la probabilidad de que compre caramelos es 0,7. ¿Cuál es la probabilidad de que compre ambos dulces? Si la probabilidad de que compre caramelos o chocolates es 0,8.

Resolución:

Sean los eventos:
A: compra chocolates.
B: compra caramelos.
Por dato:
$P(A) = 0,3$
$P(B) = 0,7$
$P(A \cup B) = 0,8$

Piden: $P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0,8 = 0,3 + 0,7 - P(A \cap B)$$
$$\therefore P(A + B) = 0,2$$

10 De un total de 52 cartas, se extraen 2 a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de espadas?

Resolución:

Sean los eventos:
A_1: la 1.ª carta es de espadas.
A_2: la 2.ª carta es de espadas.

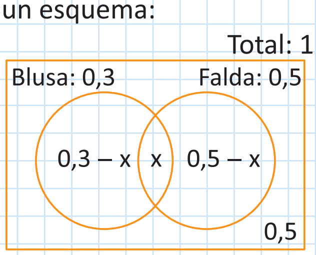
Se tiene: $P(A_1) = \frac{13}{52}$; $P(A_2/A_1) = \frac{12}{51}$

Piden:
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$$
$$\therefore P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{17}$$

11 La probabilidad de que Charo compre una blusa es 0,3 y de que compre una falda es 0,5. Halla la probabilidad de que compre solo una de dichas/prendas, si la probabilidad de que no compre ninguna es 0,5.

Resolución:

Haciendo un esquema:



Del gráfico:
$$(0,3 - x) + x + (0,5 - x) + 0,5 = 1$$
$$1,3 - x = 1$$
$$x = 0,3$$

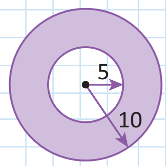
Probabilidad de que compre solo la blusa:
$$0,3 - 0,3 = 0$$

Probabilidad de que compre solo la falda:
$$0,5 - 0,3 = 0,2$$

Piden: $0 + 0,2 = 0,2$

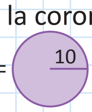
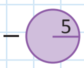
12 Sobre un plano se ha trazado dos circunferencias de radio 5 cm y 10 cm respectivamente. Halla la probabilidad de que un punto marcado al azar en el círculo mayor caiga en la corona circular formada por las circunferencias (suponga que la probabilidad de que un punto incida en una figura plana es proporcional al área de esta figura y no depende de su situación).

Resolución:



Del enunciado:
Casos totales:
Área del círculo de radio 10 cm:
$A = \pi \times 10^2 = 100\pi$

Casos a favor:
Área de la corona:

$A_{corona} =$  $-$  $= \pi \times 10^2 - \pi \times 5^2 = 75\pi$

$$\text{Probabilidad} = \frac{75\pi}{100\pi} = \frac{3}{4}$$

13 Suponga que se ha cargado un dado de manera que la probabilidad de que ocurra un número determinado es proporcional al cuadrado mismo. Calcula la probabilidad de que se obtenga 4 puntos.

Resolución:

1 punto $\Rightarrow 1^2p$	4 puntos $\Rightarrow 4^2p$
2 punto $\Rightarrow 2^2p$	5 puntos $\Rightarrow 5^2p$
3 puntos $\Rightarrow 3^2p$	6 puntos $\Rightarrow 6^2p$

Como con certeza se obtendrá 1; 2; 3; 4; 5 o 6 puntos:
$$1^2p + 2^2p + 3^2p + ... + 6^2p = 1$$
$$\left(\frac{6 \times 7 \times 13}{6}\right)p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{91}$$

$$\text{Probabilidad de obtener } 4 = 16\left(\frac{1}{91}\right) = \frac{16}{91}$$

Actividades de razonamiento

1. Al arrojar 2 monedas sobre una mesa una seguida de la otra, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?

A) 3/5 B) 3/4 C) 1/3
D) 1/6 E) 1/5

2. Si se arrojan dos dados sobre una mesa, ¿cuál es la probabilidad de que el puntaje obtenido no sea un número par?

A) 1/2 B) 1/4 C) 2/3
D) 1/3 E) 3/5

3. De un juego de cartas se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de tréboles?

A) 1/6 B) 2/5 C) 3/4
D) 1/5 E) 1/4

4. Se lanzan 2 dados sobre una mesa, ¿cuál es la probabilidad de obtener, sumando ambos puntos, 9?

A) 1/4 B) 1/9 C) 1/3
D) 3/5 E) 1/2

5. En una urna hay 40 bolas rojas y 20 bolas negras. Si se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea negra?

A) 1/6 B) 1/5 C) 2/3
D) 1/3 E) 1/2

6. De 30 personas que viajan a Huaraz 8 son de Ica, 10 son de Tacna y el resto de Lima. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los viajeros no sea de Tacna?

A) 2/3 B) 2/5 C) 1/6
D) 3/4 E) 1/3

7. Al extraer una carta de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de obtener una carta que no sea 10?

A) 1/9 B) 1/5 C) 12/13
D) 12/17 E) 10/13

8. Al lanzar tres monedas sobre una mesa una seguida de la otra, ¿cuál es la probabilidad de que no se obtengan figuras iguales?

A) 1/4 B) 2/3 C) 1/6
D) 1/2 E) 3/4

9. Un alumno rinde un examen, cuya nota es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no obtenga una nota desaprobatoria?

A) 5/8 B) 10/21 C) 1/2
D) 3/4 E) 1/3

10. De una baraja se extrae una carta aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un as o un corazón?

A) 7/13 B) 3/5 C) 4/13
D) 5/13 E) 9/13

11. Al extraer una carta de una baraja y al arrojar al suelo un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener una espada y un número impar en el dado?

A) 1/4 B) 3/5 C) 1/5
D) 1/8 E) 1/6

12. En el cajón de una cómoda hay 8 camisas blancas y 2 camisas azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una por una dos camisas, ambas sean azules?

A) 1/9 B) 3/47 C) 3/16
D) 1/6 E) 1/45

13. Al lanzar 2 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos de los 2 dados sea 7?

A) 1/6 B) 3/4 C) 1/5
D) 1/9 E) 2/7

14. Al lanzar 2 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos de los 2 dados no sea 7?

A) 1/6 B) 5/6 C) 1/5
D) 2/3 E) 3/7

Claves

1. B	5. D	9. B	13. A
2. A	6. A	10. C	14. B
3. E	7. C	11. D	
4. B	8. E	12. E	

Reto



Si se arrojan 5 monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 sellos y 2 caras?

Rpta.: 0,3125

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarillas y siete verdes. Si se extrae una bola al azar, calcula la probabilidad de que sea roja.

   A) 0,6 B) 0,3 C) 0,5 D) 0,1 E) 0,4

2. Del problema 1, calcula la probabilidad de que sea verde.

   A) 0,9 B) 0,6 C) 0,35 D) 0,7 E) 0,4

3. Del problema 1, calcula la probabilidad de que sea amarilla.

   A) 0,25 B) 0,90 C) 0,75 D) 0,20 E) 0,60

4. Del problema 1, calcula la probabilidad de que no sea roja.

   A) 0,9 B) 0,3 C) 0,7 D) 0,6 E) 0,2

5. Del problema 1, calcula la probabilidad de que no sea amarilla.

   A) 0,5 B) 0,75 C) 0,6 D) 0,4 E) 0,7

6. En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumno rubios y 10 morenos. Si un día asisten todos los alumnos y se selecciona uno al azar, encuentra la probabilidad de que un alumno seleccionado, sea hombre.



   A) 3/4 B) 1/4 C) 1/3 D) 3/5 E) 2/5

7. Del problema 6, encuentra la probabilidad de que el alumno seleccionado sea una mujer morena.

   A) 3/5 B) 1/5 C) 1/2 D) 4/9 E) 2/9

8. Del problema 6, encuentra la probabilidad de que el alumno seleccionado sea hombre o mujer.

   A) 1 B) 2/3 C) 1/9 D) 1/2 E) 1/5

9. Halla la probabilidad de que al lanzar un dado al aire, salga un número par.

   A) 3/4 B) 1/3 C) 1/2 D) 2/3 E) 1/4

10. Del problema 9, halla la probabilidad de que salga un múltiplo de tres.

    A) 1/5 B) 2/3 C) 1/2 D) 3/4 E) 1/3

NIVEL 2

11. Del problema 9, halla la probabilidad de que salga un número mayor que cuatro.

    A) 3/4 B) 1/3 C) 1/2 D) 1/6 E) 2/5

(12) Halla la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan dos caras.

A) 1/4 B) 3/5 C) 3/4 D) 1/2 E) 1/3

(13) Del problema 12, halla la probabilidad de que salgan dos sellos.

A) 2/3 B) 1/2 C) 1/4 D) 3/4 E) 1/5

(14) Del problema 12, halla la probabilidad de que salga una cara y un sello.

A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3 D) 2/3 E) 1/2

(15) En una urna se tienen fichas numeradas consecutivamente desde 1 hasta 20. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha se obtenga un múltiplo de 3?



A) 0,8 B) 0,3 C)0,6 D) 0,7 E) 0,5

(16) Un artillero dispara a un blanco. Si la probabilidad de acertar un disparo es 0,01 ¿qué probabilidad tiene de no acertar?

A) 0,90 B) 0,69 C) 0,96 D) 0,98 E) 0,99

Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$P(A) = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

(17) Halla: $P(A^C)$

A) 1/6 B) 3/4 C) 1/5 D) 2/3 E) 5/8

(18) Halla: $P(B^C)$

A) 1/4 B) 3/4 C) 1/2 D) 1/6 E) 3/5

(19) Halla: $P(A \cup B)$

A) 5/8 B) 1/2 C) 1/3 D) 3/5 E) 1/4

(20) Halla: $P(A^C \cap B^C)$

A) 1/5 B) 2/3 C) 4/7 D) 3/8 E) 1/4

NIVEL 3

(21) Halla: $P(A^C \cup B^C)$

A) 3/4 B) 1/6 C) 2/7 D) 1/5 E) 2/5

(22) Halla: $P(A \cap B^C)$

A) 3/4 B) 1/8 C) 1/3 D) 2/3 E) 1/2

23. Halla: $P(B \cap A^C)$

A) 3/4 B) 3/7 C) 1/4 D) 2/5 E) 1/5

Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$P(A^C) = \frac{2}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

24. Halla: P(A)

A) 1/2 B) 3/5 C)1/3 D) 1/5 E) 2/5

25. Halla: P(B)

A) 2/5 B) 1/6 C) 1/5 D) 3/4 E) 2/3

26. Halla: $P(A \cap B^C)$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/5 D) 1/9 E) 1/12

27. Halla: $P(B \cap A^C)$

A) 3/5 B) 1/3 C) 1/4 D) 5/12 E) 2/9

28. Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades 1/2 y 1/5 de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de 1/10. Determina la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen.

A) 1/6 B) 3/5 C) 3/4 D) 1/9 E) 1/2

29. Dos hermanos salen de caza. El primero caza un promedio de 2 piezas cada 5 disparos y el segundo una pieza cada 2 disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo a una misma pieza, ¿cuál es la probabilidad de que ambos cacen?

A) 7/10 B) 3/4 C) 1/6
D) 1/4 E) 2/5

30. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca?

A) 2/5 B) 1/6 C) 1/4
D) 3/7 E) 3/5

Claves

NIVEL 1	9. C	17. E	25. E
1. E	10. E	18. C	26. E
2. C	NIVEL 2	19. A	27. D
3. A	11. B	20. D	28. B
4. D	12. A	NIVEL 3	29. A
5. B	13. C	21. A	30. E
6. C	14. E	22. B	
7. D	15. B	23. C	
8. A	16. E	24. C	

Teoría de conjuntos

NOCIÓN DE CONJUNTO

Un conjunto es toda agrupación o colección de objetos concretos o abstractos, que reciben el nombre de elementos.

Ejemplos:
- Los puntos cardinales.
- Las notas musicales
- Los números primos menores que 20.

Notación:
Usualmente para representar conjuntos se emplean letras mayúsculas: A; B; C; ...; etc., mientras que los elementos se representan con letras minúsculas o números.



Atención

Ya sea que un conjunto esté determinado por comprensión o por extensión, los elementos que lo conforman deben ser tales que se puedan distinguir con claridad.

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por comprensión

Cuando se define al conjunto enunciando las propiedades comunes que caracterizan a los elementos de dicho conjunto.

Ejemplos:
A = {x / x es un punto cardinal}
B = {x / x es una nota musical}
C = {x / x es un número primo menor que 20}

Por extensión

Cuando se nombran explícitamente a los elementos de dicho conjunto.

Ejemplos:
A = {norte; sur; este; oeste}
B = {do; re; mi; fa; sol; la; si}
C = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19}

Observación

La **relación de pertenencia** es entre elemento y conjunto, mientras que la **relación de inclusión** se utiliza entre conjuntos.



RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Relación de pertenencia

Un elemento pertenece ($\in$) a un conjunto, si forma parte de este. Un elemento no pertenece ($\notin$) a un conjunto si no cumple con la condición mencionada.

Ejemplo:
B = {do; re; mi; fa; sol; la; si}

- mi $\in$ B
- sol $\in$ B
- tu $\notin$ B
- el $\notin$ B

C = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14}

- 4 $\in$ C
- 10 $\in$ C
- 5 $\notin$ C
- 9 $\notin$ C

Relación de inclusión

Se dice que el conjunto A es parte del conjunto B, o que está incluido en B, si todos los elementos de A están en B. Se le denota $A \subset B$ y se lee: "A está incluido en B".

Es decir:

$$A \subset B \iff \forall\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

B = {do; re; mi; fa; sol; la; si}
C = {do; mi; sol}
D = {re; fa; si}
E = {sol; la; si}
F = {do; re; mi; el; la}

- $C \subset B$
- $D \subset B$
- $E \subset B$
- $F \not\subset B$

CLASES DE CONJUNTOS

Conjunto vacío

Se denomina así al conjunto que carece de elementos.

Ejemplo:
$A = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge 9 < x < 10\}$

Conjunto unitario

Se denomina así al conjunto que posee un solo elemento.

Ejemplo:
$B = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge 14 < x \leq 15\}$

Conjunto finito

Se denomina así al conjunto que posee un número limitado de elementos.

Ejemplo:
C = {x / x es un mes del año}

Conjunto infinito

Se denomina así al conjunto que posee una cantidad ilimitada de elementos.

Ejemplo:
D = {x / x es un número primo}

Conjunto universal

Se denomina así al conjunto que sirve de referencia para el marco de una situación en particular.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

A = {x / x es un gato}

B = {x / x es un tigre}

Su conjunto universal será:
U = {x / x es un felino}

CONJUNTO POTENCIA

Es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. Si tenemos el conjunto A, el conjunto potencia de A se denota por P(A).

Ejemplo:

A = {a; b}

$P(A) = \{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$

Atención

Si A = {a; b} es un conjunto unitario, entonces:
a = b



Importante

Sea M = {x; y}

Donde:
$P(M) = \{\varnothing; \{x\}; \{y\}; \{x; y\}\}$

Se tiene que:
$\varnothing$; {y} ; {x} se denominan subconjuntos propios.



El número de subconjuntos del conjunto A = {a; b} se obtiene así: $4 = 2^2$
En general:
Si el conjunto A tiene n elementos $\Rightarrow$ P(A) tiene 2^n subconjuntos.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Recuerda

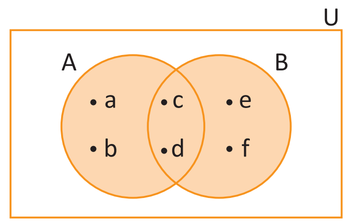
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Unión (A ∪ B)

Ejemplo:
Dados los conjuntos:
A = {a; b; c; d}
B = {c; d; e; f}

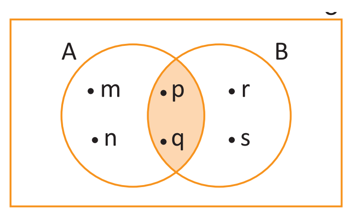
Entonces:
A ∪ B = {a; b; c; d; e; f}



Intersección (A ∩ B)

Ejemplo:
Dados los conjuntos:
A = {m; n; p; q}
B = {p; q; r; s}

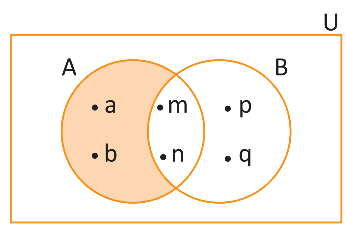
Entonces:
A ∩ B = {p; q}



Diferencia (A – B)

Ejemplo:
Dados los conjuntos:
A = {a; b; m; n}
B = {m; n; p; q}

Entonces:
A – B = {a; b}



Recuerda

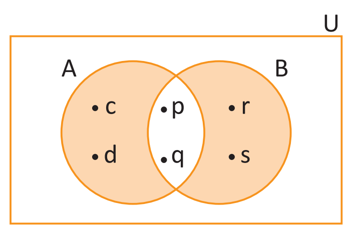
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$



Diferencia simétrica (A △ B)

Ejemplo:
Dados los conjuntos
A = {c; d; p; q}
B = {p; q; r; s}

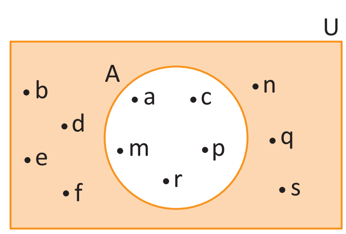
Luego:
A ∆ B = {c; d; r; s}



Complemento (A' o A^C)

Ejemplo:
Dados los conjuntos
U = {a; b; c; d; e; f; m; n; p; q; r; s}
A = {a; c; m; p; r}

Luego:
A' = {b; d; e; f; n; q; s}



Problemas resueltos

1 Determina por extensión el siguiente conjunto:
$A = \{x^2 + 4 / x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 5\}$

Resolución:

Como: $1 < x \leq 5 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5\}$
Luego: $x = 2 \Rightarrow 2^2 + 4 = 8$
$x = 3 \Rightarrow 3^2 + 4 = 13$
$x = 4 \Rightarrow 4^2 + 4 = 20$
$x = 5 \Rightarrow 5^2 + 4 = 29$
$\therefore A = \{8; 13; 20; 29\}$

2 Calcula la suma de los elementos de:
$B = \{x^2 - 3 / x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x < 7\}$

Resolución:

Dado que: $3 \leq x < 7 \Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 6\}$
Luego: $x = 3 \Rightarrow 3^2 - 3 = 6$
$x = 4 \Rightarrow 4^2 - 3 = 13$
$x = 5 \Rightarrow 5^2 - 3 = 22$
$x = 6 \Rightarrow 6^2 - 3 = 33$

$A = \{6; 13; 22; 33\}$
$\therefore$ Suma de elementos $= 6 + 13 + 22 + 33 = 74$

3 Halla a + b si:
$C = \{4a + 1 ; 2b + 9; 3a + 4\}$ es unitario.

Resolución:

C es unitario, entonces:
$4a + 1 = 3a + 4 \quad \wedge \quad 2b + 9 = 3a + 4$
$a = 3 \qquad 2b + 9 = 3(3) + 4$
$2b = 4 \Rightarrow b = 2$
$\therefore a + b = 3 + 2 = 5$

4 Si: $A = \{m + n; m + 2n - 2; 10\}$
Es un conjunto unitario.
Da el valor de: $3m^2 - n^2$

Resolución:

Por ser A unitario se cumple:
$m + 2n - 2 = 10 \quad ...(I)$
$m + n = 10 \quad ...(II)$
Restando (I) – (II):
$n - 2 = 0$
$n = 2 \Rightarrow m = 8$
$\therefore 3m^2 - n^2 = 3(8)^2 - 2^2 = 192 - 4 = 188$

5 Si los conjuntos A y B son iguales:
$A = \{3a + 5; 7\}$ y $B = \{b/3 - 2; 5\}$
Calcula: $b - a$

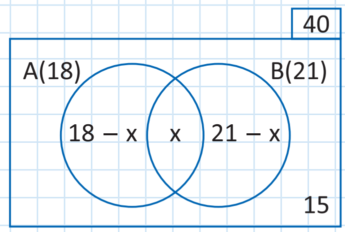
Resolución:

Como A = B se cumple:
$3a + 5 = 5 \quad \wedge \quad b/3 - 2 = 7$
$3a = 0 \quad \wedge \quad b/3 = 9$
$a = 0 \quad \wedge \quad b = 27$
$\therefore b - a = 27 - 0 = 27$

6 Si: $n(U) = 40$; $n(A) = 18$; $n(B) = 21$; $n(A \cup B)' = 15$
Halla: $n(A \cap B)$

Resolución:

Gráficamente:



Del gráfico:
$18 - x + x + 21 - x + 15 = 40$
$54 - x = 40$
$x = 14$
$\therefore n(A \cap B) = 14$

7 Dado el conjunto: $A = \{7; 8; 10; 15\}$
Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
I. $7 \in A$
II. $9 \in A$
III. $\{10\} \in A$
IV. $\{15\} \in A$

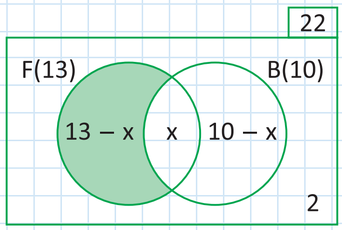
Resolución:

I. $7 \in A$ es V
II. $9 \in A$ es F
III. $\{10\} \in A$ es F
IV. $\{15\} \in A$ es F

8 De un grupo de 22 estudiantes universitarios, 13 practican fútbol y 10 practican básquet, además se sabe que 2 alumnos no practican ninguno de los 2 deportes. ¿Cuántos practican solo fútbol?

Resolución:

Gráficamente:



Del gráfico:

$13 - x + x + 10 - x + 2 = 22$

$25 - x = 22$

$x = 3$

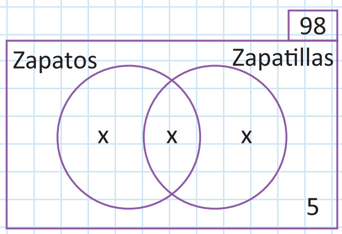
Piden:

$13 - x = 13 - 3 = 10$

9 De un grupo de 98 personas, los que usan solo zapatos es igual a los que usan solo zapatillas e igual a los que usan zapatos y zapatillas. Si 5 personas no usan zapatos ni zapatillas, ¿cuántos usan zapatos?

Resolución:

Haciendo un gráfico:



Del gráfico:

$x + x + x + 5 = 98$

$3x + 5 = 98$

$3x = 93$

$x = 31$

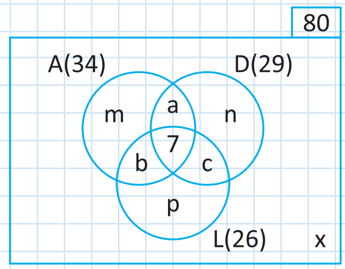
Piden:

$2x = 2(31) = 62$

10 De 80 integrantes de un club recreativo, se sabe que 34 practican ajedrez, 29 damas, 26 ludo, 12 ajedrez y damas, 12 damas y ludo, 11 ajedrez y ludo, y 7 practican los tres juegos. ¿Cuántos no practican ninguno de los tres juegos mencionados?

Resolución:

Gráficamente:



Del gráfico y de los datos:

$a + 7 = 12 \Rightarrow a = 5$

$c + 7 = 12 \Rightarrow c = 5$

$b + 7 = 11 \Rightarrow b = 4$

También:

$a + b + m + 7 = 34$

$5 + 4 + m + 7 = 34$

$m + 16 = 34 \Rightarrow m = 18$

$a + c + n + 7 = 29$

$5 + 5 + n + 7 = 29$

$n + 17 = 29 \Rightarrow n = 12$

$b + c + p + 7 = 26$

$4 + 5 + p + 7 = 26$

$p + 16 = 26 \Rightarrow p = 10$

Además:

$a + b + c + m + n + p + 7 + x = 80$

$5 + 4 + 5 + 18 + 12 + 10 + 7 + x = 80$

$61 + x = 80$

$x = 19$

$\therefore$ 19 personas no practican ninguno de los tres juegos.

Actividades de razonamiento

1. Determina por extensión el siguiente conjunto:
$A = \{x^2 + 5 / x \in \mathbb{Z} \wedge 3 < x < 8\}$

A) {14; 21; 30; 41}
B) {30; 41; 54; 69}
C) {21; 30; 41; 54}
D) {21; 30; 41}
E) {30; 41; 54}

2. Halla la suma de los elementos del conjunto:
$B = \{x^2 - 4 / x \in \mathbb{Z} \wedge 5 < x < 10\}$

A) 137 B) 214 C) 169 D) 182 E) 207

3. Los conjuntos:
$A = \{a^3 + 2; 13\}$; $B = \{b - a; 127\}$ son iguales.
Calcula el valor de $a + b$.

A) 18 B) 28 C) 33 D) 23 E) 30

4. Dados los conjuntos unitarios:
$A = \{x + 7; 2x + 5\}$; $B = \{y - 3; 5y - 15\}$
Halla el valor de $x + y$.

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5. Si los conjuntos A y B son iguales y unitarios:
$A = \{a + 3; 3b + 1\}$; $B = \{6c + 1; 8c - 1\}$
Calcula: $a + b + c$

A) 6 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

6. Si: $n(U) = 75$; $n(A) = 41$; $n(A \cap B) = 23$ y $n(A \cup B)' = 10$
Halla: $n(B)$

A) 45 B) 50 C) 49 D) 48 E) 47

7. Si los conjuntos A; B y C son unitarios:
$A = \{a + 4; b - 2; 2a - 4\}$
$$B = \left\{\frac{b}{2} - 3; \frac{(c+3)}{3}\right\}$$
$C = \{\frac{c}{3} - 1;\ d - 4\}$
Halla: $a + b + c + d$

A) 40 B) 35 C) 30 D) 37 E) 32

8. Si: $n(U) = 70$; $n(A) = 37$; $n(B) = 42$ y $n(A \cup B)' = 10$
Halla: $n(A \cap B)$

A) 19 B) 23 C) 18 D) 25 E) 20

9. Dado el conjunto:
$M = \{a; \{b\}; \{m\}; p\}$
¿Cuántas proposiciones son falsas?

I. $\{b\} \subset M$
II. $b \in M$
III. $\{\{m\}\} \subset M$
IV. $\{\{b\}; p\} \subset M$
V. $\{\{b\}; \{m\}\} \in M$
VI. $m \in M$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Dado el conjunto:
$P = \{x / x \in \mathbb{N}; 5 < x < 12\}$
Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. $\{7; 8; 11\} \subset P$
II. $5 \in P$
III. $\{8; 10\} \subset P$
IV. $n(P) = 6$

A) VFVF B) VFVV C) VFFV
D) FVVF E) FFVV

11. Una persona come naranja o manzana en el desayuno cada mañana durante el mes de abril. Si come naranja 25 mañanas y manzana 18 mañanas, ¿cuántas mañanas come naranja y manzana?

A) 18 B) 15 C) 13 D) 20 E) 16

12. De un grupo de 300 personas, 180 conocen Cusco, 160 conocen Arequipa, y 20 no conocen Cusco ni Arequipa. ¿Cuántos conocen una sola ciudad?

A) 220 B) 200 C) 210 D) 180 E) 190

13. De un grupo de 59 personas se observa lo siguiente:
8 personas solo ven televisión.
16 personas solo escuchan radio.
20 personas solo leen periódico.
7 personas ven televisión y escuchan radio.
8 personas ven televisión y leen periódico
4 personas escuchan radio y leen periódico.
2 personas no realizan ninguna de estas 3 actividades.
¿Cuántas personas realizan las 3 actividades?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4

14. Durante el mes de agosto, una señora compra 15 días carne, 22 días pollo, 13 días pescado, 5 días carne y pescado, 7 días pollo y pescado, y 12 días carne y pollo. ¿Cuántos días compró las tres especies?

A) 8 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Claves

1. C	5. B	9. D	13. B
2. B	6. E	10. B	14. D
3. D	7. D	11. C	
4. A	8. A	12. A	

Reto



Se tienen los conjuntos:
$A = \{a^2 + 1; 3a - 1\}$
$B = \{3x + y; x - y + 8\}$
Si ambos son conjuntos unitarios, calcula: $x + y + a$

Rpta.: 6 ó 5

Refuerza practicando

NIVEL 1

Determina por extensión los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x + 1 / \ x \in \mathbb{N} \ \wedge \ -1 \leq x < 2\}$

   A) {–1; 0; 1; 2} B) {1; 2} C) {0; 1}
   D) {–1; 0; 1} E) {0; 1; 2}

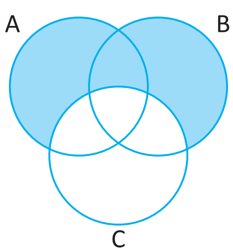
2. $B = \{\frac{x-1}{2} / x \in \mathbb{N} \ \wedge \ 2 \leq x < 7\}$

   A) {1; 2; 3; 4; 5; 6} B) {1; 2}
   C) {0,5; 1; 1,5; 2; 2,5} D) {2; 3; 4; 5; 6}
   E) {1; 2; 3}

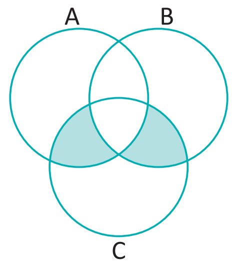
3. $C = \{2x + 1 / x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ -3 < x < 3\}$

   A) {–1; 0; 1} B) {–2; –1; 0; 1}
   C) {–3; –1; 1; 3; 5} D) {–2; –1; 0}
   E) {2; 3; 4}

¿A qué operación de conjuntos corresponden los siguientes gráficos?

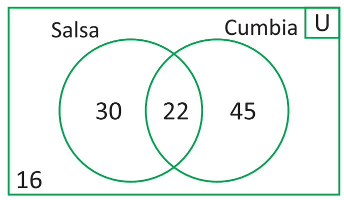
4. 

   A) $(A \cup C) - B$
   B) $A \Delta B$
   C) $(A \cap B) - B$
   D) $(A \cup C) \cap C$
   E) $(A \cup B) - C$

5. 

   A) $(A \Delta B) \cap C$
   B) $(A \cap B) - C$
   C) $(A \cup B) \cap C$
   D) $A \Delta B$
   E) $A \Delta C$

El siguiente diagrama de Venn representa los alumnos matriculados en una academia de baile. De acuerdo a esta información responde las preguntas.



6. ¿Cuántos alumnos están inscritos en salsa?

   A) 52 B) 50 C) 45 D) 22 E) 30

7. ¿Cuántos alumnos están inscritos en cumbia?

   A) 57 B) 22 C) 67 D) 60 E) 45

8. ¿Cuántos alumnos están inscritos en salsa o cumbia?

   A) 52 B) 119 C) 22 D) 67 E) 97

9. ¿Cuántos alumnos están inscritos en salsa y cumbia?

   A) 67 B) 22 C) 30 D) 52 E) 45

10. Halla el valor de $(x + y)$ si el conjunto:
$A = \{3x - 1; 8; y - x\}$, es unitario.
A) 12 B) 17 C) 14 D) 9 E) 10

NIVEL 2

11. Sean los conjuntos iguales A y B:
$A = \{m + 5; 7\}$; $B = \{n - 2; 12\}$
Halla el valor de: $m . n$
A) 36 B) 63 C) 49 D) 45 E) 56

12. De un grupo de 40 personas, 20 conocen Tacna, 25 conocen Puno y 12 ambas ciudades. ¿Cuántas no conocen ninguna de estas ciudades?
A) 6 B) 8 C) 9 D) 7 E) 10

Dados los conjuntos U, A y B; determina el conjunto indicado en cada caso.

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ (Conjunto universal)

$A = \{2; 4; 6; 8\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

13. Halla: $B \cap A$
A) {1; 3} B) {2} C) {1; 2; 3; 4}
D) {2; 4} E) {4}

14. Halla: $B \Delta A$
A) {5; 6; 10} B) {1; 3; 5}
C) {1; 3; 5; 6; 8} D) {3; 6; 10}
E) {5; 6; 8; 10}

15. Halla: $U - B$
A) {6; 7; 8; 9} B) {5; 7; 9} C) {6; 8; 9}
D) {7; 8; 9} E) {6; 7; 8; 9; 10}

16. En un salón de clases de 65 alumnos, 50 aprueban Literatura y 35 Física. ¿Cuántos alumnos aprueban los dos cursos, si todos aprueban por lo menos un curso?
A) 20 B) 18 C) 22 D) 15 E) 10

17. En una encuesta realizada en una ciudad, se sabe que al 76% de la población le gusta el pescado y al 83% el chancho, si al 8% no le agrada ninguno de estos productos, ¿qué porcentaje de la población gusta solo de chancho?
A) 15% B) 22% C) 12% D) 16% E) 18%

18. En una fiesta, las mujeres que no bailan es el triple de los hombres que bailan; estos últimos a su vez son la sexta parte de los hombres que no bailan. Si en la fiesta hay 55 personas, ¿cuántas parejas bailan?
A) 10 B) 6 C) 8 D) 5 E) 3

NIVEL 3

19. $P = \{3; \{7\}; \{9; 10\}; \{4\}; 2; 4\}$
Indica qué alternativa es incorrecta.
A) $2 \in P$ B) $\{2\} \subset P$
C) $\{9; 10\} \subset P$ D) $\{\{4\}\} \subset P$
E) $\varnothing \subset P$

20. Si $\{a; b\} \subset \mathbb{N}$ y además:
$\{a + b; b\} = \{0; 1\}$
Halla: $a^4 + 4b^2$
A) 4 B) 5 C) 3
D) 2 E) 1

21. Si F, G y H son conjuntos no vacíos, tales que $F \subset G$ y $F \cap H = \varnothing$. Indica la alternativa correcta.
A) $(F - G) \cup H = \varnothing$ B) $(F \cap G) \cap H = \varnothing$
C) $(F - H) \cup G = \varnothing$ D) $(F - H) \cap G = G$
E) Todas son correctas

22. Sean los conjuntos:
$M = \{x \in \mathbb{N} / |x| \leq 1\}$
$N = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 2\}$
Halla: $n[P(M \cap N)]$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

23. Sean los conjuntos $A \neq \varnothing$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / 2x + 3 = 6\}$. Entonces se puede afirmar:
A) $A \cup B = \varnothing$ B) $B \neq \varnothing$
C) $A \cup B^C = A^C$ D) $A \cap A^C = B$
E) $A \cap B \neq \varnothing$

24. Respecto al conjunto T:
$T = \{x + y \in \mathbb{N} / x + y = 7; 3x - 5y = 7; 2y \leq 2\}$
Se puede decir:
A) T tiene 2 elementos.
B) T es el conjunto vacío.
C) T tiene 5 elementos.
D) T es unitario.
E) T es un conjunto infinito.

Claves

NIVEL 1			
1. E	8. E	15. E	22. B
2. C	9. B	16. A	23. D
3. C	10. C	17. D	24. C
4. E	NIVEL 2	18. D	
5. A	11. B	NIVEL 3	
6. A	12. D	19. C	
7. C	13. D	20. E	
	14. C	21. D	

Psicotécnico

Recuerda

El psicotécnico estimula la mente y aumenta nuestro coeficiente intelectual.



DEFINICIÓN

Es un test psicométrico que nos ayuda a desarrollar habilidades que nos permitirán captar mejor los diferentes cursos.

Los test se pueden dividir en:

TIPOS DE TEST

Test matemático numérico

Nos ayudan a desarrollar nuestras habilidades matemáticas.

Ejemplo:
Halla el número que sigue:

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; ?

Se observa que la suma de los dos primeros es el tercero y así sucesivamente.
$\therefore\ ? = 5 + 8 = 13$

Test de razonamiento verbal

Mejoran nuestras habilidades verbales.

Ejemplos:

- Si CERDO es a PIARA, entonces OVEJA es a:

  La relación que encontramos es de individuo a grupo.

$\therefore$ OVEJA es a REBAÑO.

- Si $A + B = C \wedge A + D = E$, halla el valor de: $B + D$

  Si asignamos a cada letra el orden que ocupa en el abecedario.

A ;	B ;	C ;	D ;	E
1.°	2.°	3.°	4.°	5.°

Entonces → $A + B = C$; $1 + 2 = 3$ $\wedge$ $A + D = E$; $1 + 4 = 5$

$\therefore B + D = F$
$2 + 4 = 6$

Atención

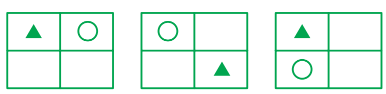
Para poder resolver mejor los test de razonamiento verbal es necesario tener en cuenta el orden de las letras del abecedario.



Test de figuras

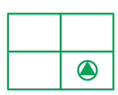
Nos ayudan a mejorar nuestra memoria y reconocimiento visual.

Ejemplo:
Halla la figura que sigue:



- El triángulo avanza dos espacios en sentido horario.
- El círculo avanza un espacio en sentido antihorario.

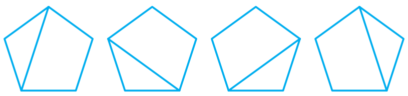
Por lo tanto:

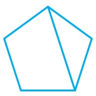
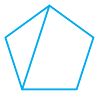
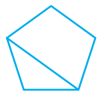
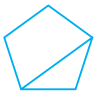
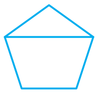


Es la figura que continúa.

Problemas resueltos

1 ¿Qué figura continúa?

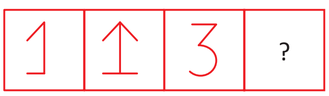


A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Resolución:

Los puntos de la diagonal se desplazan de uno en uno en sentido antihorario.
∴ Clave E.

2 Halla la figura que sigue:

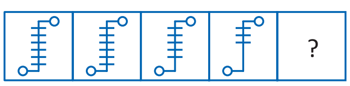


A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Resolución:

Observamos que el 2.° casillero es la figura del 1.° y su reflejo.
∴ Clave D.

3 Indica la figura que continúa:

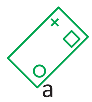
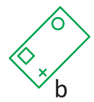
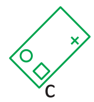
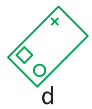
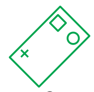
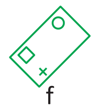


A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

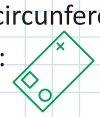
Resolución:

Las figuras son las mismas con la diferencia que las líneas van disminuyendo en progresión aritmética empezando de 0; luego 1, continuando con 2 para luego obtener la figura final que tendría cero líneas.
∴ Clave A.

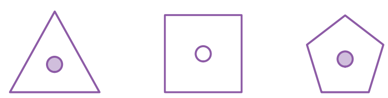
4 La figura que no corresponde es:


a

b

c

d

e

f

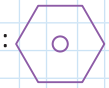
Resolución:

Lo que caracteriza a cada una de las figuras es que a la izquierda del signo + se encuentra el cuadrado y debajo de este, está la circunferencia.
Esto no se cumple en la figura d: 

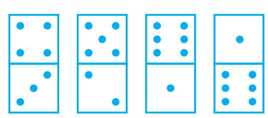
5 ¿Qué figura continúa?

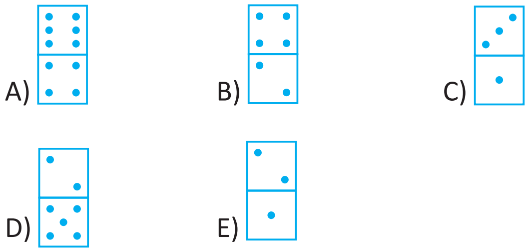


Resolución:

Nos damos cuenta que el número de lados de cada figura va aumentando de uno en uno, y dentro de ellas hay una circunferencia que va alternando su sombreado.
Por lo tanto, la figura que continúa es: 

6 ¿Qué figura sigue?



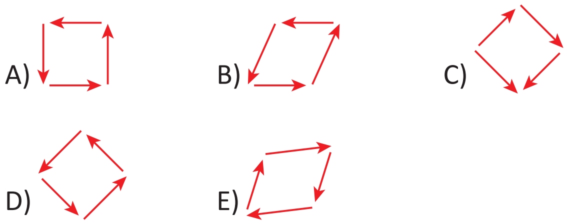


Resolución:

- Notamos que todas son caras opuestas de un dado común.

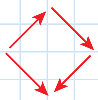
∴ Clave D.

7 ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



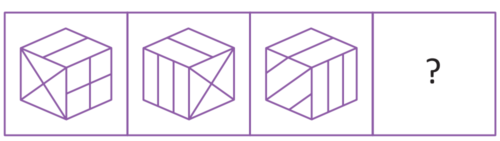
Resolución:

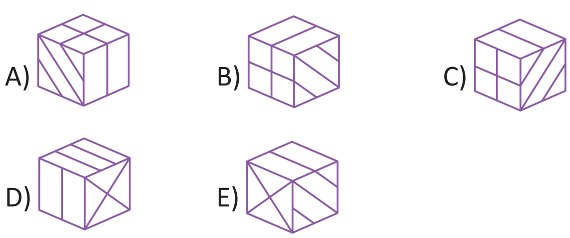
Nos damos cuenta de que cuatro figuras tienen todas sus flechas en un mismo sentido menos la tercera.
La figura que no guarda relación es:



∴ Clave C.

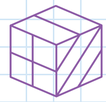
8 ¿Qué figura continúa?





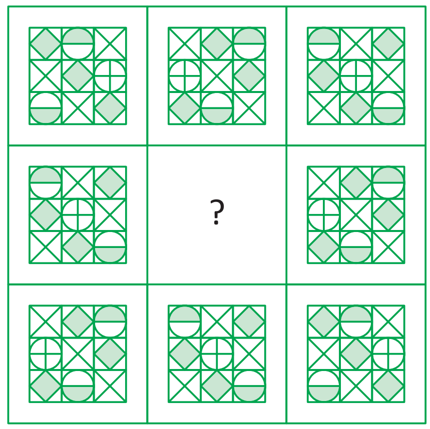
Resolución:

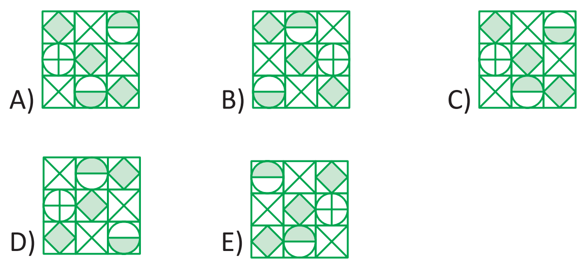
Analizando se deduce que cada cubo gira a la derecha una vez. Entonces el tercer cubo al girar a la derecha quedaría así:



∴ Clave C.

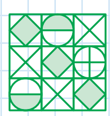
7 ¿Qué figura completa correctamente la serie?





Resolución:

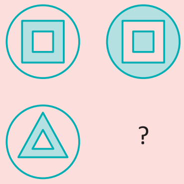
Se deduce que en cada fila del cuadradado mayor, existen tres cuadrados; los cuales tienen figuras internas que avanzan un lugar en fila, para llegar al siguiente cuadrado.
Por lo tanto, el gráfico que falta es:



∴ Clave B.

Actividades de razonamiento

1. Indica la figura que falta.

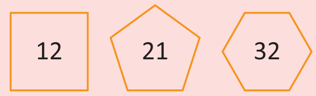


?

A) B) C) D) E)



2. Halla la figura que continúa.



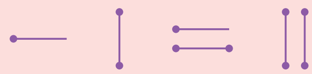
A) B) C) D) E)



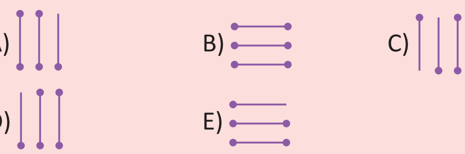
3. ¿Cuál es el día anterior al mañana del pasado mañana del ayer de domingo?

A) Sábado
B) Lunes
C) Martes
D) Jueves
E) Domingo

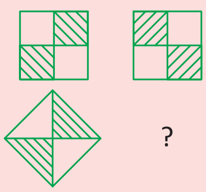
4. ¿Cuál es la figura que sigue en la serie?



A) B) C) D) E)

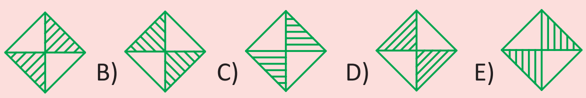


5. Indica la figura que falta.

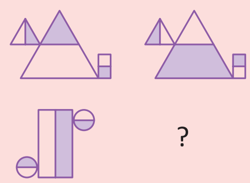


?

A) B) C) D) E)

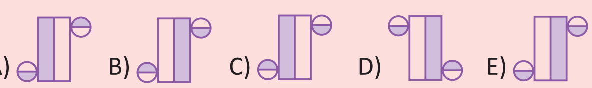


6. Indica la figura que falta.



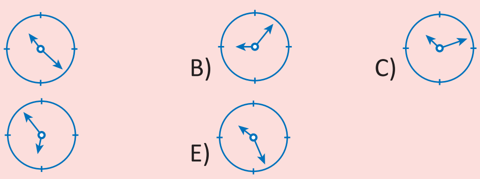
?

A) B) C) D) E)

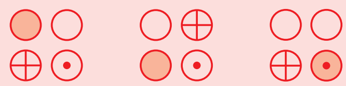


7. ¿Qué figura no guarda relación con los demás?

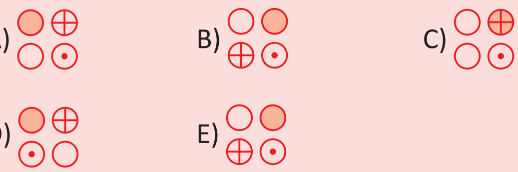
A) B) C) D) E)



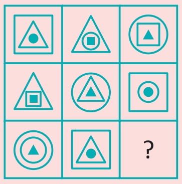
8. Indica la figura que continúa.

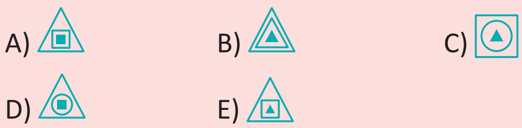


A) B) C) D) E)

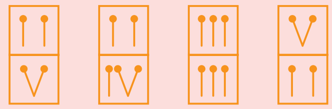


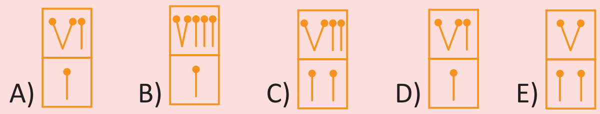
9. Indica la figura que completa la secuencia.



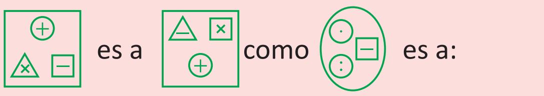


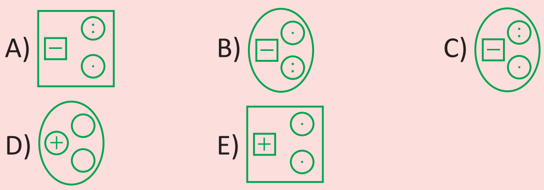
10. ¿Qué figura sigue?



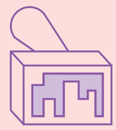


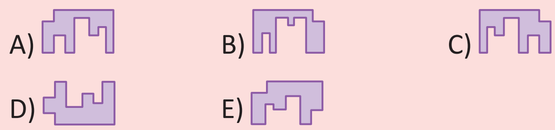
11. ¿Qué figura corresponde?



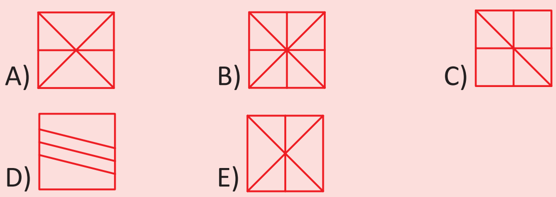


12. ¿Qué figura se obtiene al presionar el sello en un papel?

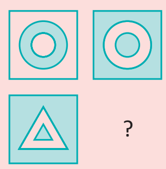


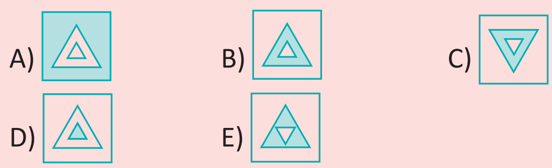


13. ¿Cuál de las figuras mostradas no guarda relación con las demás?



14. Indica la figura que falta en:





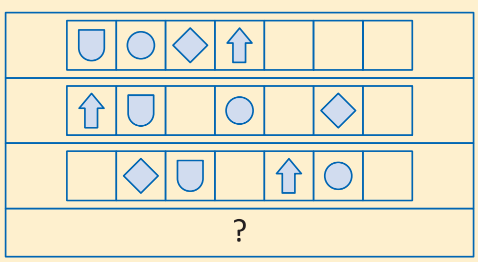
Claves

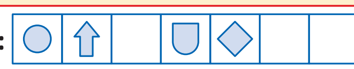
1. C
2. E
3. B
4. E
5. D
6. A
7. D
8. C
9. A
10. B
11. C
12. C
13. D
14. B

Reto

¿Qué figura completa la secuencia?

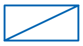
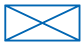


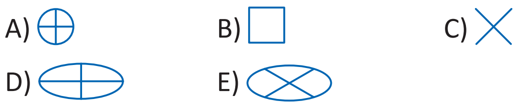


Rpta.: 

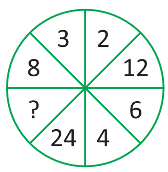
Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si  es a  como  es a ...

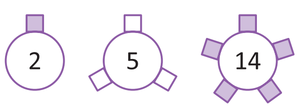


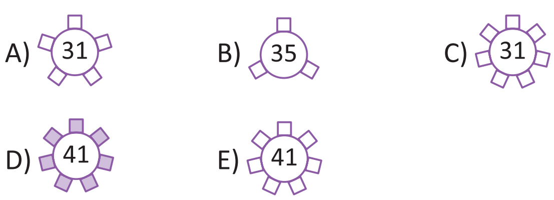
2. Indica el número que falta.



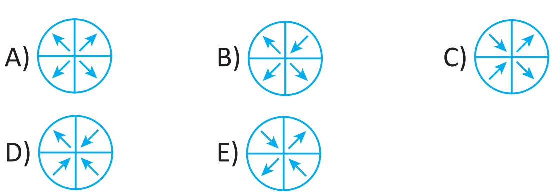
A) 10 B) 1 C) 18 D) 15 E) 3

3. ¿Qué figura continúa?

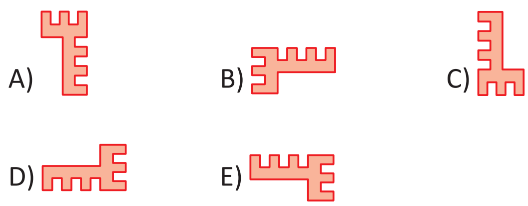




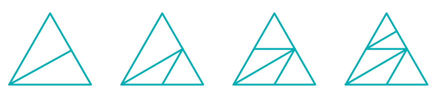
4. ¿Cuál de los siguientes gráficos no concuerda con el grupo?

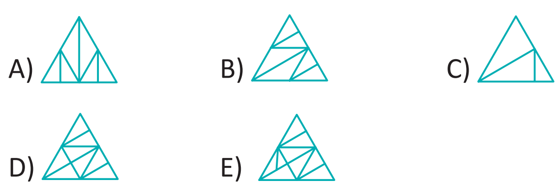


5. Halla la figura que no tiene relación con las otras.

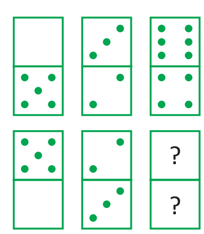


6. ¿Qué figura continúa?





7. ¿Cuál es la cantidad total de puntos que le corresponde a la última ficha?



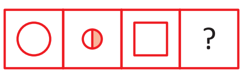
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

8) ¿Qué día es el anteayer del ayer del día previo al pasado mañana de miércoles?

A) Domingo B) Martes C) Lunes
D) Jueves E) Viernes

NIVEL 2

9) Halla la figura que sigue.

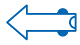
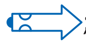


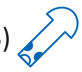
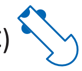
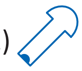
A)  B)  C) 
D)  E) 

10) Reconoce en las alternativas la figura que guarda relación con el cuadro.

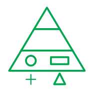
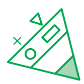
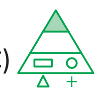
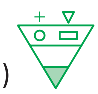


A)  B)  C) 
D)  E) 

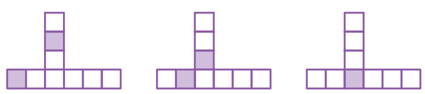
11)  es a ; como  es a:

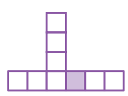
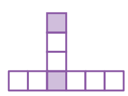
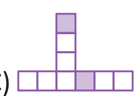
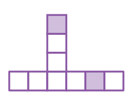
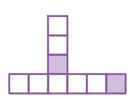
A)  B)  C) 
D)  E) 

12) ¿Qué figura no tiene relación con las demás?

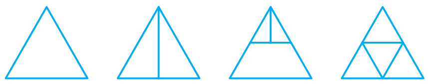
A)  B)  C) 
D)  E) 

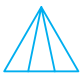
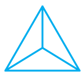
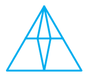
13) En la siguiente sucesión, ¿cuál es la figura que continúa?

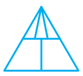
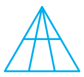


A)  B)  C) 
D)  E) 

14 ¿Qué figura continúa?



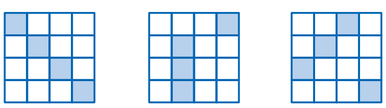
A)  B)  C) 

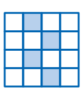
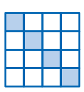
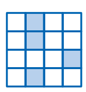
D)  E) 

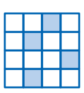
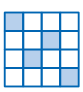
15 Si salado es a gusto, entonces áspero es a ...

A) Mano B) Cara C) Oído
D) Tacto E) Dedos

16 ¿Qué figura continúa?

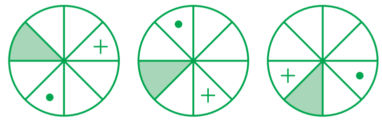


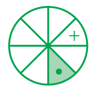
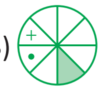
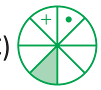
A)  B)  C) 

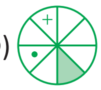
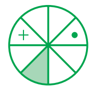
D)  E) 

NIVEL 3

17 ¿Qué figura continúa?



A)  B)  C) 

D)  E) 

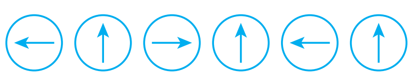
18 Indica la figura que continúa.



A)  B)  C) 

D)  E) 

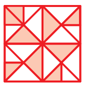
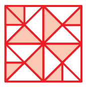
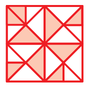
19 Se tiene una sucesión de figuras enumeradas correlativamente del 1 al 6. Descubre la figura que no guarda secuencia con las demás.

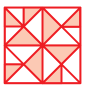
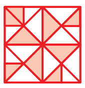


1 2 3 4 5 6

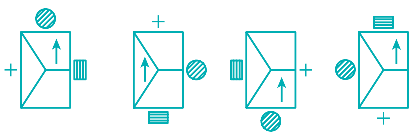
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

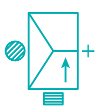
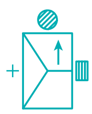
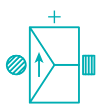
20. Indica la figura que se diferencia de las otras.

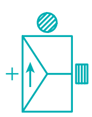
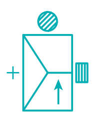
A)  B)  C) 

D)  E) 

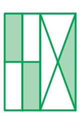
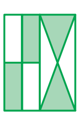
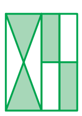
21. ¿Cuál es la figura que continúa?

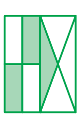


A)  B)  C) 

D)  E) 

22. ¿Cuál es la figura que no guarda relación con las demás?

A)  B)  C) 

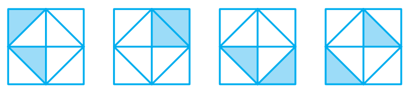
D)  E) 

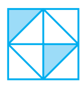
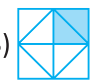
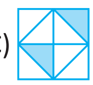
23. ¿Qué día es el pasado mañana del siguiente día del ayer del pasado mañana del día previo de hoy? Si ayer fue el pasado mañana del domingo.

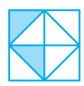
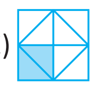
A) Sábado B) Jueves C) Lunes

D) Martes E) Viernes

24. Halla la figura que sigue.



A)  B)  C) 

D)  E) 

Claves

NIVEL 1	7. D	13. C	19. C
1. D	8. C	14. D	20. D
2. B	NIVEL 2	15. D	21. D
3. E	9. E	16. D	22. E
4. E	10. E	NIVEL 3	23. A
5. E	11. C	17. D	24. D
6. B	12. A	18. C	